PNI 2004 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si considerino le successioni di termini generali a_n, b_n *e* c_n *tali che:*

$$a_n = \sum_{i,k=1}^{n} ik\,, \quad b_n = \sum_{j=1}^{n} j^2\,, \quad c_n = \sum_{\substack{i,k=1 \\ (k \geq i)}}^{n} ik\,.$$

a)

Dimostrare che risulta:

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \quad \boldsymbol{b_n} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \boldsymbol{c_n} = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

$$\boldsymbol{a_n} = \sum_{i,k=1}^{n} ik = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot k + \sum_{k=1}^{n} 2\cdot k + \dots + \sum_{k=1}^{n} n\cdot k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)(1+2+\dots+n) =$$

$$= (1+2+\dots+n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

$$\boldsymbol{b_n} = \sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

Questa relazione può essere dimostrata per induzione:

1. La relazione è vera per n=1: $1^2 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 1$
2. Supponiamo che $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3. Dimostriamo che la relazione è vera per n+1, cioè che:
   $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$.
   Infatti risulta:
   $$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 =$$
   $$= (n+1)\left[\frac{1}{6}n(2n+1) + (n+1)\right] = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6n+6) =$$
   $$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$\boldsymbol{c_n} = \sum_{\substack{i,k=1\\(k\geq i)}}^{n} ik = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot k + \sum_{k=2}^{n} 2\cdot k + \cdots + \sum_{k=n}^{n} n\cdot k =$$

$$= 1\cdot(1+2+\cdots+n) + 2\cdot(2+\cdots+n) + 3\cdot(3+\cdots+n) + \cdots + n\cdot(n) =$$

$= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)}$: dimostriamo questa relazione per induzione.

1. La relazione è vera per n=1: $1\cdot 1 = \frac{1}{24}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 1$
2. Supponiamo che la proprietà valga per n, cioè che:
   $1\cdot(1+2+\cdots+n) + 2\cdot(2+\cdots+n) + 3\cdot(3+\cdots+n) + \cdots + n\cdot(n) =$
   $= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$
3. Dimostriamo che la relazione vale per n+1, cioè che:
   $(1+2+\cdots+n+n+1) + 2\cdot(2+\cdots+n+n+1) + 3\cdot(3+\cdots+n+n+1) +$
   $+\cdots+n\cdot(n+n+1) + (n+1)(n+1) = \dfrac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(3n+4)$
   Si ha:
   $(1+2+\cdots+n+n+1) + 2\cdot(2+\cdots+n+n+1) + 3\cdot(3+\cdots+n+n+1) +$
   $+\cdots+n\cdot(n+n+1) + (n+1)(n+1) =$
   $= 1\cdot(1+2+\cdots+n) + (n+1) + 2\cdot(2+\cdots+n) + 2(n+1) + \cdots +$
   $+n(n) + n(n+1) + (n+1)(n+1) =$
   $= \dfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1) + [(n+1) + 2(n+1) + \cdots + n(n+1) +$
   $+(n+1)(n+1)] =$
   $= \dfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1) + (n+1)(1+2+\cdots+n+n+1) =$
   $= \dfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1) + (n+1)\left[\dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1\right] =$
   $= \dfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1) + (n+1)\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right) =$
   $= \dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)\left[\dfrac{1}{12}n(3n+1) + (n+1)\right] =$
   $= \dfrac{1}{24}(n+1)(n+2)[n(3n+1) + 12n + 12] =$
   $= \dfrac{1}{24}(n+1)(n+2)(3n^2+13n+12) = \dfrac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(3n+4)$

b)

Calcolare il più grande valore di n per cui a_n non supera 100 000.

$$a_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \leq 100000 \quad se \quad n^2(n+1)^2 \leq 4\cdot 10^5\,,\ \ n(n+1) \leq 2\cdot 10^2\cdot\sqrt{10}$$

$$n^2 + n - 200\sqrt{10} \leq 0 \quad se \qquad \frac{-\sqrt{800\sqrt{10}+1}-1}{2} \leq n \leq \frac{\sqrt{800\sqrt{10}+1}-1}{2}$$

Essendo $\frac{\sqrt{800\sqrt{10}+1}-1}{2} \cong 24.7$, il più grande valore di n richiesto è 24.

c)

Definire per ricorsione la successione di termine generale c_n.

$$c_n = \sum_{\substack{i,k=1 \\ (k \geq i)}}^{n} ik = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

In base a quanto visto nel punto precedente si ha:

$$c_{n+1} = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1) + (n+1)\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) =$$
$$= c_n + \frac{1}{2} \cdot (n+1)^2(n+2)$$

Quindi la successione può essere definita per ricorsione nel modo seguente:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n + \frac{1}{2} \cdot (n+1)^2(n+2) \end{cases}$$

d)

Utilizzare la precedente definizione per scrivere un algoritmo che fornisca i primi 20 numeri di quella successione e li comunichi sotto forma di matrice di 5 righe e 4 colonne.

Programma in Pascal che risolve il problema posto; utilizziamo una funzione ricorsiva che genera gli elementi della successione trovata nel punto precedente in forma ricorsiva:

```
Program   d;
 USES  Crt;
 VAR
     risposta :char;
     n,i,j:integer;
     A:array[1..4,1..5] of real;
(*-----------------------------------------------------------------*)
Function  an(k:integer):real;
Begin
  if k=1 then an:=1 else
    begin
     an:=1;
     an:=an(k-1)+0.5*(k)*(k)*(k+1);
    end
End;
(*------------------------------------------------------------------*)
BEGIN (* main*)
 Repeat
   clrscr;
   writeln('Premi <invio> per generare gli elementi della successione');
```

```
   readln;
   For i:=1 to 4 do
    begin
      for j:=1 to 5 do
        begin
          A[i,j]:=an(j+5*(i-1));
          write(A[i,j]:10:0);
        end;
     writeln
    end;
   (*writeln('a(',i,')= ',an(i));   *)
   Write('                              ANCORA ? ( S / N )     ' );
   Readln(risposta);
 Until risposta in ['N','n']
END.
```

Il programma può essere provato on line copiandolo nell’apposita finestra al seguente link*:* *http://www.tutorialspoint.com/compile_pascal_online.php*

I 20 elementi generati sono

1	*7*	*25*	*65*	*140*
266	*462*	*750*	*1155*	*1705*
2431	*3367*	*4550*	*6020*	*7820*
9996	*12597*	*15675*	*19285*	*23485*

Con la collaborazione di Angela Santamaria