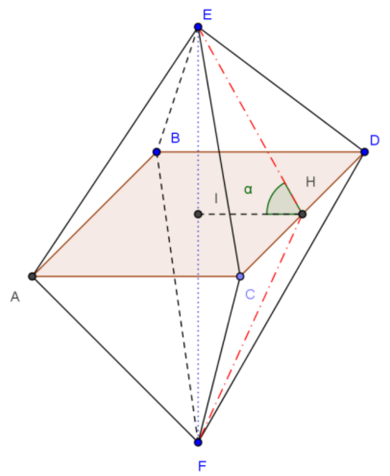
PNI 2004 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.



L'angolo diedro corrisponde all'angolo EHF, che è il doppio di α. Il triangolo EHI, rettangolo in I, ha il cateto IH che è metà dello spigolo s dell'ottaedro e l'ipotenusa EH che è l'altezza della faccia CDE, triangolo equilatero di lato s, quindi:

$$IH = \frac{s}{2},\quad EH = s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\ IH = EH\cdot cos\alpha\quad da\ cui\quad cos\alpha = \frac{IH}{EH} = \frac{\frac{s}{2}}{s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Pertanto:

$$\alpha = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.955\ rad = 54.736° = 54°44'10''$$

Quindi l'angolo diedro richiesto misura $2\alpha = 109°28'20''$

QUESITO 2

Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.
Si può concludere che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Siano α e β due piani perpendicolari. Scegliamo un sistema di assi cartesiani orogonali nello spazio in modo che i due piani coincidano con il piano xy e con il piano xz rispettivamente; le lo ro equazioni sono quindi:

α: $z = 0$, β: $y = 0$

I due piani hanno in comune l'asse x, che ha equazioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Consideriamo una generica retta r perpendicolare ad uno dei due piani, per esempio ad α. Osserviamo che una terna di parametri direttori di α sono (0,0,1), quindi la retta r avrà parametri direttori proporzionali, la sua equazione è pertanto del tipo:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c + t \end{cases}$$

Dobbiamo dimostrare che r è parallela al piano β o appartiene ad esso.

Una terna di parametri direttori di quest'ultimo piano è: (0,1,0). La condizione di parallelismo fra piano e retta ci dice che la somma dei prodotti dei parametri direttori deve essere uguale a zero, quindi:

$0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$: ciò dimostra che r è parallela a β. In particolare, se il punto (a,b,c) appartiene a questo piano, cioè se b=0, la retta r giace sul piano.

Non è detto, invece, che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro. Per esempio la retta s di equazioni:

$$\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$ è parallela ad α ; infatti una terna di parametri direttori di α è (0,0,1) ed una terna di parametri direttori di s è (1,1,0); la somma dei prodotti dei parametri direttori è zero, quindi s è parallela ad α .
Però s non è perpendicolare a β: i parametri direttori di questo piano sono, come già detto, proporzionali a (0,1,0) mentre quelli della retta s sono proporzionali a (1,1,0), quindi non sono tra di loro proporzionali.

QUESITO 3

Determinare il dominio della funzione $f(x) = ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

Affinché la funzione sia definita deve essere: $x \geq 0 \quad e \quad 1 - 2x + \sqrt{x} > 0$.

La seconda disequazione è equivalente a: $\sqrt{x} > 2x - 1$.
Le soluzioni di questa disequazione equivalgono alle soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$a) \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \; 0 \leq x < \frac{1}{2} \qquad b) \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > (2x-1)^2 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda disequazione dl sistema b):

$4x^2 - 5x + 1 < 0 \; , \; \frac{1}{4} < x < 1$
Quindi, tornando al sistema b):

$$b) \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \; \frac{1}{2} \leq x < 1$$

L’unione delle soluzioni dei due sistemi è: $0 \leq x < 1$

Tenendo presente la condizione $x \geq 0$ il dominio è: $0 \leq x < 1$.

QUESITO 4

Il limite di tgx per x tendente a +∞:

A) è +∞; *B) è* $\frac{\pi}{2}$ *;* *C) non esiste;* *D) esiste ma non si riesce a calcolare.*

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

La funzione $y = tgx, \; per \; x \longrightarrow +\infty$ oscilla tra $-\infty$ e $+\infty$, quindi non può ammettere limite.
Se esistesse un limite finito L, in un intorno di +∞ (cioè per x>k) la funzione dovrebbe essere contenuta in una striscia orizzontale di mediana L e ampiezza piccola a piacere, e ciò, per quanto detto sull’oscillazione della funzione, non è possibile. In modo analogo

non può esistere il limte $+\infty$ o $-\infty$, perché per x>k la funzione dovrebbe essere sempre maggiore di un numero a piacere M o minore di –M: ed anche ciò è impossibile per l'oscillazione della funzione.

La risposta corretta è la C).

QUESITO 5

Si consideri la seguente implicazione: «Se la funzione reale di variabile reale f (x) è derivabile nel punto a allora è continua in a». Come noto, essa enuncia un importante teorema di analisi matematica. Enunciare le implicazioni inversa, contronominale e contraria dell'implicazione considerata e dire di ciascuna di esse se si tratta di un teorema. Quando non lo è fornire un esempio che chiarisca la situazione.

Dimostriamo, anche se non richiesto, che se una funzione è derivabile in un punto a allora è ivi continua.

In base alla definizione di derivabilità risulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(x_0)}{h}=f'(a) \quad finito$$

Segue che:

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h=\lim_{h\to 0}f'(a)\cdot h=0$$

E ciò equivale a dire che la funzione è continua in a .

Implicazione diretta: *«Se la funzione reale di variabile reale f (x) è derivabile nel punto a allora è continua in a»*

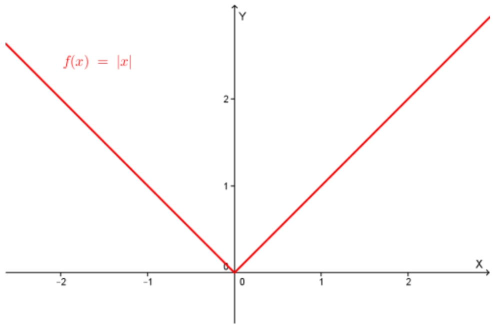
Poniamo: p="f(x) è derivabile in a" , q="f(x) è continua in a"

La proposizione diretta equivale a : $p \Rightarrow q$

Implicazione inversa: *«Se la funzione reale di variabile reale f (x) è continua nel punto a allora è derivabile in a».*

La proposizione inversa equivale a : $q \Rightarrow p$

Questa proposizione non è un teorema. Infatti, se una funzione è continua in un punto, non è detto che sia ivi derivabile; un semplice esempio è fornito dalla funzione $y=f(x)=|x|$, che è continua in x=0, ma non derivabile (in particolare abbiamo un punto angoloso, con derivata destra pari a 1 e derivata sinistra pari a -1).



Implicazione contronominale: *«Se la funzione reale di variabile reale f (x) non è continua nel punto a allora non è derivabile in a».*

La proposizione contronominale equivale a : $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

Questa proposizione è un teorema: infatti se la funzione fosse derivabile in a allora sarebbe continua, contro l'ipotesi.

Implicazione contraria: *«Se la funzione reale di variabile reale f (x) non è derivabile nel punto a allora non è continua in a».*

La proposizione inversa equivale a : $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$

Questa proposizione non è un teorema: infatti se la funzione non è derivabile in a può essere continua (si veda l'esempio $y = f(x) = |x|$ fatto sopra).

QUESITO 6

Determinare il più grande valore del parametro reale m per cui il valore del seguente integrale:

$\int_0^m \frac{2x-3m}{x-2m}\,dx$ *non supera 24.*

Calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{2x-3m}{x-2m}\,dx = \int \frac{2x-4m+m}{x-2m}\,dx = 2\int \frac{x-2m}{x-2m}\,dx + \int \frac{m}{x-2m}\,dx =$$

$$= 2x + m \cdot ln|x-2m| + K$$

$$\int_0^m \frac{2x-3m}{x-2m}\,dx = [2x + m \cdot ln|x-2m|]_0^m = 2m + m \cdot \ln|m| - m \cdot \ln|2m| \le 24$$

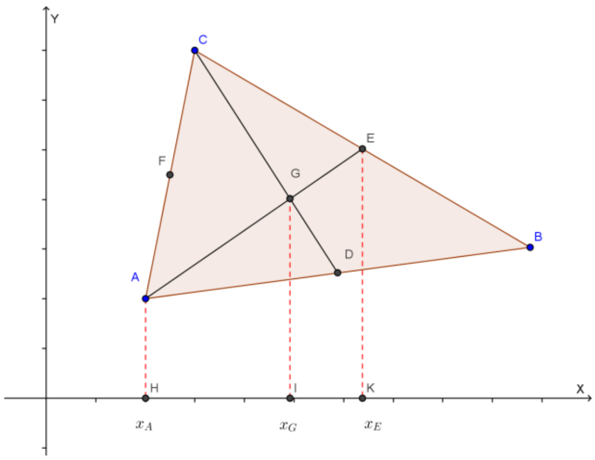
$$2m + m \cdot \ln|m| - m \cdot ln2 - m \cdot \ln|m| \le 24, \quad 2m - m \cdot ln2 \le 24 \ , \quad m \le \frac{24}{2 - ln2}$$

Quindi il più grande valore reale richiesto è: $m = \frac{24}{2-ln2}$.

QUESITO 7

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato un triangolo qualsiasi. Dimostrare le formule che esprimono le coordinate del baricentro del triangolo in funzione delle coordinate dei suoi vertici.

Siano $A = (x_A; y_A),\ B = (x_B; y_B)\ e\ \ C = (x_C; y_C)$ le coordinate dei vertici del triangolo e indichiamo con $G = (x_G; y_G)$ il baricentro (punto di incontro delle mediane). Indichiamo poi con $E = (x_E; y_E)$ il punto medio del lato BC.



Risulta:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} \quad e \quad y_E = \frac{y_B + y_E}{2}$$

Ricordiamo che, per una nota proprietà, il segmento AG è il doppio del segmento GE (il baricentro di un triangolo divide ogni mediana in due parti, di cui quella che ha un estremo nel vertice del triangolo è il doppio dell'altra).
Dette H, I e K rispettivamente le proiezioni di A, G e E sull'asse x, per il teorema di Talete si ha:
$HI: IK = AG: GE = 2: 1$ quindi:

$$\frac{x_G - x_A}{x_E - x_G} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_G - x_A = 2x_E - 2x_G \quad \Rightarrow 3x_G = 2x_E + x_A = (x_B + x_C) + x_A \quad da\ cui:$$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

In modo del tutto analogo, proiettando A, G,E sull'asse y si ha:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

QUESITO 8

Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due dadi con le facce numerate da «1» a «6», aventi tutte le stesse possibilità di uscire. Si ottiene un successo se, nell'esperimento, esce almeno un «5».
Determinare il minimo numero di volte in cui bisogna effettuare l'esperimento per garantirsi una probabilità pari almeno al 99% di ottenere almeno un successo.

Calcoliamo la probabilità p del successo (nel lancio di due dadi esce almeno un 5). Tale probabilità equivale a $1 - p(non\ esce\ alcun\ 5)$.
Dei 36 casi possibili nel lancio di due dadi, le coppie che non presentano alcun 5 sono 25 (5 possibilità per il primo dado, da 2 a 6, e altrettante per il secondo dado). Quindi:

$q = p(non\ esce\ alcun\ 5) = \frac{25}{36}$. Pertanto:

$$p = p(esce\ almeno\ un\ 5) = 1 - p(non\ esce\ alcun\ 5) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

La probabilità che esca almeno un 5 in n lanci, in base alla distribuzione binomiale, è data da:

$$1 - q^n = 1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n \geq 0.99 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{25}{36}\right)^n \leq 0.01 \quad \Rightarrow n \cdot ln\left(\frac{25}{36}\right) \leq \ln(0.01)$$

$$da\ cui, \qquad notando\ che\ ln\left(\frac{25}{36}\right) < 0$$

$$n \geq \frac{\ln(0.01)}{ln\left(\frac{25}{36}\right)} \cong 12.63 \quad \Rightarrow \quad n = 13$$

Il minimo numero n di volte in cui bisogna effettuare l'esperimento per garantirsi una probabilità pari almeno al 99% di ottenere almeno un successo è $n = 13$.

QUESITO 9

Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Sapendo che sul podio finiscono i primi 3 classificati e ammesso che tutti gli atleti abbiano le stesse possibilità, calcolare le probabilità che:
a) sul podio finiscano sia Antonio che Pietro;
b) almeno uno dei due finisca sul podio;
c) nessuno dei due finisca sul podio.

I possibili ordini di arrivo con 8 atleti sono 8!=40320.

Analizziamo le possibilità che Antonio e Pietro siano tra i primi 3. Un caso possibile è il seguente:

1° A, 2° P, 3° uno degli altri 6 atleti rimanenti, 5! Possibilità dal 4° all'8° posto: questa configurazione ha quindi 6! Possibilità.
Siccome A e P possono occupare i primi tre posti in 6 modi (disposizioni di 3 oggetti a 2 a 2), i casi possibili con A e P fra i primi tre sono: $6 \cdot 6!$

a) La probabilità che Antonio e Pietro finiscano entrambi sul podio è quindi:

$$\frac{6 \cdot 6!}{8!} = \frac{6}{7 \cdot 8} = \frac{3}{28}$$

b) I casi possibili in cui solo A finisce nei primi tre (1°, 2° o 3°) sono: $3 \cdot D_{6,2} \cdot 5!$ (A in uno dei primi posti, due dei 6 diversi da P negli altri due posti del podio, dal quarto all'ottavo 5! possibilità).
Altrettanti sono i casi in cui solo P finisce fra i primi tre.
Quindi i casi possibili in cui solo A, o solo P o entrambi finiscano sul podio sono:
$3 \cdot D_{6,2} \cdot 5! + 3 \cdot D_{6,2} \cdot 5! + 6 \cdot 6! = 3 \cdot 30 \cdot 5! + 3 \cdot 30 \cdot 5! + 6 \cdot 6! = 15 \cdot 6! + 15 \cdot 6! + 6 \cdot 6!$

La probabilità che almeno uno dei due finisca sul podio è quindi:

$$\frac{15 \cdot 6! + 15 \cdot 6! + 6 \cdot 6!}{8!} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}.$$

c) La probabilità che nessuno dei due finisca sul podio è:

$$1 - p(almeno\ uno\ finisce\ sul\ podio) = 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}.$$

QUESITO 10

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = mx + 2y - m \\ Y = -x - y + m \end{cases}$$

dove m è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di m.

Notiamo che le equazioni date individuano un'affinità se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, cioè se:

$\begin{vmatrix} m & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -m + 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \neq 2$

Per trovare i punti uniti dobbiamo porre $X = x$ e $Y = y$:

$\begin{cases} x = mx + 2y - m \\ y = -x - y + m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = mx + 2y - m \\ m = x + 2y \end{cases} \quad$ *e sostituendo nella prima equazione*:

$x = x(x + 2y) + 2y - x - 2y \ , \quad x^2 + 2xy - 2x = 0 \, , \quad x(x + 2y - 2) = 0$

Quindi si hanno le rette x=0 e x+2y-2=0; ma la seconda si ottiene per m=2 dalla seconda equazione del sistema precedente, quindi è da scartare; rimane la retta x=0 privata del punto che appartiene alla retta x+2y-2=0, che ha ordinata y=1. Concludendo:

Il luogo dei punti uniti è dalla rette di equazione $x = 0$ privata del punto di ordinata 1.

N.B.

Se m=2 le equazioni date (che non individuano una trasformazione geometrica) diventano:

$\begin{cases} X = 2x + 2y - 2 \\ Y = -x - y + 2 \end{cases}$ per esempio X=0 e Y=0 ha come controimmagini le soluzioni del sistema:

$\begin{cases} 0 = 2x + 2y - 2 \\ 0 = -x - y + 2 \end{cases}$;

ma tale sistema è impossibile (sommando alla prima equazione la seconda moltiplicata per 2 si ottiene: 0=2).

Quindi il punto (0;0) non ha controimmagini: non c'è quindi corrispondenza biunivoca fra i punti del piano, non trattasi perciò di una trasformazione geometrica.

Con la collaborazione di Angela Santamaria