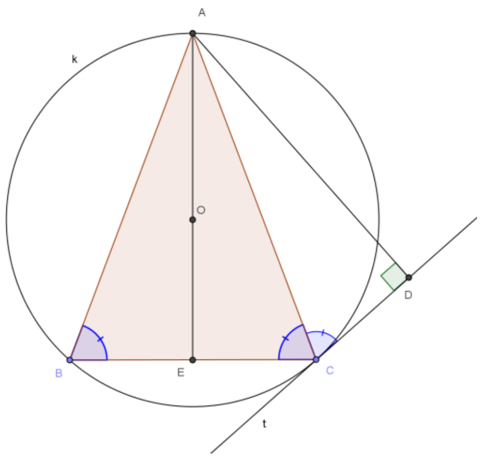
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2005 – PROBLEMA 1

Il triangolo ABC e isoscele sulla base BC e contiene il centro della circonferenza k circoscritta ad esso. Condotta la retta t tangente a k in C, indicare con D la proiezione ortogonale di A su t e con E quella di A su BC.



a)

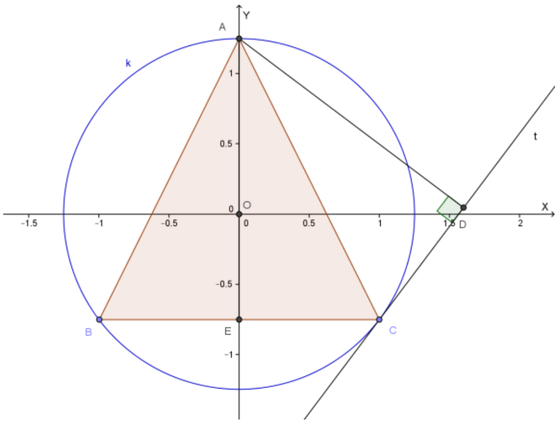
Dimostrare che i triangoli ACD e ACE sono congruenti.

I due triangoli sono rettangoli ed hanno l'ipotenusa AC in comune. Inoltre l'angolo ACD è congruente all'angolo ABC, perché insistono sullo stesso arco AC (quello situato vicino a D); ma l'angolo ABC è congruente all'angolo ACB (angoli alla base di triangolo isoscele): i due triangoli in questione sono quindi congruenti avendo uguale l'ipotenusa ed un angolo acuto.

b)

Ammesso che le misure del raggio della circonferenza k e del segmento AE, rispetto ad un'assegnata unita di misura, siano 5/4 e 2, riferire il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), in modo però che l'asse x sia parallelo alla retta BC. Trovare:
1. le coordinate dei punti B, C, D;
2. l'equazione della circonferenza k;
3. l'equazione della parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti B, C, D.

La Scegliamo come asse y la retta EA (orientata da E verso A) e come origine il punto O (centro della circonferenza); l'asse x, di conseguenza, è la retta per O parallela a BC e diretta verso destra.



In tal sistema di riferimento la circonferenza k ha equazione: $x^2+y^2=\frac{25}{16}$.

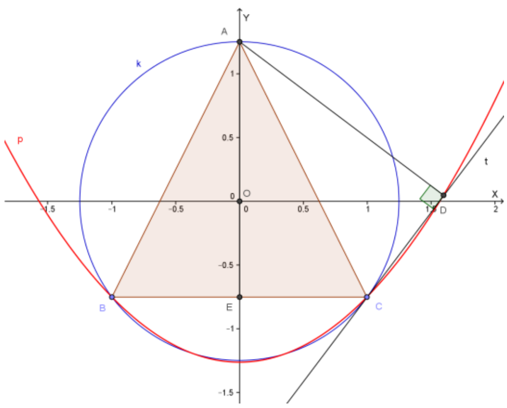
Dai dati forniti segue che B e C hanno orinata $-\left(2-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$. Per trovare le ascisse sostituiamo tale valore nella circonferenza:
$x^2+\frac{9}{16}=\frac{25}{16},\ \ x^2=1\,,\ \ x=\pm 1,\ quindi:\ \ B=\left(-1;\,-\frac{3}{4}\right),\ C=\left(1;\,-\frac{3}{4}\right)$.
Per trovare le coordinate di D cerchiamo la tangente t in C alla circonferenza (utilizziamo il metodo di sdoppiamento): $xx_C+yy_c=\frac{25}{16},\quad x-\frac{3}{4}y=\frac{25}{16}\,,\ \ y=\frac{4}{3}x-\frac{25}{12}$
Retta per A perpendicolare a t: $y-y_A=-\frac{3}{4}(x-x_A),\quad y-\frac{5}{4}=-\frac{3}{4}(x-0)$, quindi:

$$D:\begin{cases} y=\frac{4}{3}x-\frac{25}{12} \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4} \end{cases};\quad \frac{4}{3}x-\frac{25}{12}=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}\,,\qquad 16x-25=-9x+15\,,\qquad x=\frac{8}{5}$$

Quindi: $x_D=\frac{8}{5}\ ,\ \ y_D=\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{5}-\frac{25}{12}=\frac{20}{24}-\frac{25}{12}=\frac{1}{20}$: $\ D=\left(\frac{8}{5};\frac{1}{20}\right)$
La parabola richiesta è del tipo $y=ax^2+c$; imponiamo il passaggio per C e D:

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}=a+c \\ \frac{1}{20}=\frac{64}{25}a+c \end{cases};\ sottraendo\ membro\ a\ membro:\ -\frac{3}{4}-\frac{1}{20}=a-\frac{64}{25}a,$$

$a=\frac{20}{39}\,,c=-\frac{197}{156}$. Quindi la parabola p ha equazione $y=\frac{20}{39}x^2-\frac{197}{156}$



c)

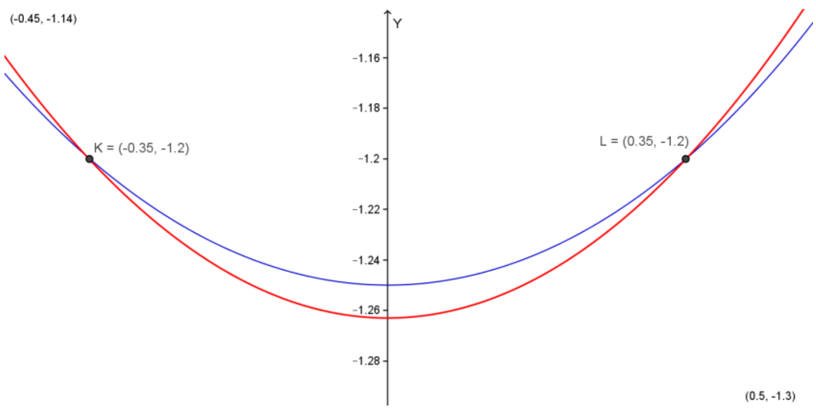
Stabilire analiticamente se la circonferenza k e la parabola p hanno altri punti in comune oltre ai punti B e C.

Dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{25}{16} \\ y = \dfrac{20}{39}x^2 - \dfrac{197}{156} \end{cases} \quad ; \quad x^2 + \left(\frac{20}{39}x^2 - \frac{197}{156}\right)^2 - \frac{25}{16} = 0 \,, \ldots : \quad x = \pm 1, \ \ x = \pm\frac{7}{20}$$

Con $x = \pm 1$ troviamo B e C, con $x = \pm\frac{7}{20}$ troviamo altri due punti K ed L:

$$K = \left(-\frac{7}{20}; -\frac{6}{5}\right), \qquad L = \left(\frac{7}{20}; -\frac{6}{5}\right)$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria