## Scuole italiane all'estero (Calendario australe suppletiva ) 2005

## PROBLEMA 1

*Si consideri l'equazione* $y = x^3 - ax + b$ .

### 1)

*Si determinino* $a$ *e* $b$ *in modo che la sua curva rappresentativa* $\Gamma$ *sia tangente, nel punto* $A$ *di ascissa* $-1$*, alla retta* $r$ *d'equazione* $y = 4$*. Si disegni* $\Gamma$*.*

Il punto A ha coordinate A=(-1; 4). Imponiamo il passaggio per A: $4 = -1 + a + b$.
Deve essere $y'(-1) = 0$; $\quad y' = 3x^2 - a,\ quindi\!:\ \ 3 - a = 0$. Pertanto:

$\begin{cases} a + b = 5 \\ 3 - a = 0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$: $\quad y = x^3 - 3x + 2$ .

### 2)

*La retta r incontra* $\Gamma$ *in un altro punto* $B$*. Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dal segmento* $AB$ *e da* $\Gamma$*.*

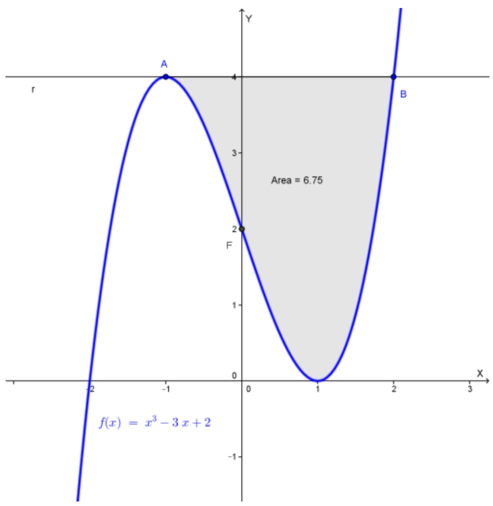
Cerchiamo B:

$\begin{cases} y = x^3 - 3x + 2 \\ y = 4 \end{cases}$ ; $\quad x^3 - 3x + 2 = 4\,, \quad x^3 - 3x - 2 = 0.$

Essendo x=-1 una radice dell'equazione, il polinomio $x^3 - 3x^2 - 2$ è divisibile per x+1; utilizzando la regola di Ruffini otteniamo:
$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)^2(x - 2) = 0\ \ se\ x = -1\ e\ x = 2.$ Quindi:
$B = (2; 4).$

Studiamo la funzione $\boldsymbol{y = f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x + 1)^2(x - 2)}$
I tratta di una cubica (quindi definita, continua e derivabile su tutto R) tangente all'asse x in x=-1, e passante per (2;0).
I limiti a +/- infinito sono +/- infinito, non ci sono asintoti.
Derivata prima: $y' = 3x^2 - 3 \geq 0\ \ per\ \ x \leq -1\ \ vel\ \ x \geq 1$: la funzione cresce per x<-1 e x>1 e decresce per -1<x<1. Massimo relativo M=(-1; 4), minimo relativo (1; 0).
Sappiamo che ogni cubica ammette uno ed un solo flesso (centro di simmetria), che si ottiene annullando la derivata seconda: $y'' = 6x = 0\ \ se\ \ x = 0$: flesso F=(0; 2).

Grafico della funzione con evidenziatala regione richiesta:




L'area della regione richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

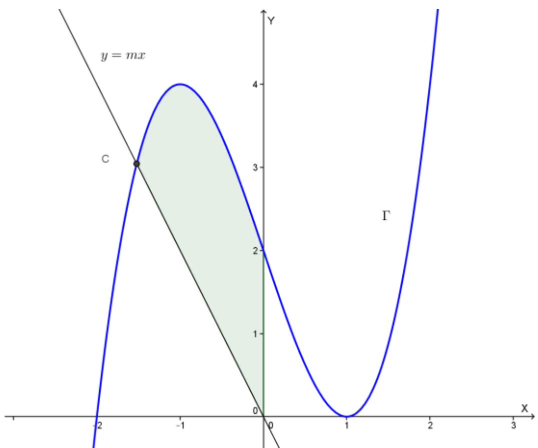
$$Area = \int_{-1}^{2} [4 - (x^3 - 3x + 2)] = \int_{-1}^{2} [2 - x^3 + 3x]\, dx = \left[2x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2} =$$

$$= 4 - 4 + 6 - \left(-2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}\ u^2 = 6.75\ u^2 = Area$$

## 3)

*Si determini l'equazione della retta $s$ per l'origine degli assi che delimita con $\Gamma$ e con l'asse $y$ una regione finita di piano, nel secondo quadrante, di area $\frac{5}{4}$.*

La generica retta per l'origine ha equazione del tipo $y = mx$.
La regione richiesta è indicata nella seguente figura:



Cerchiamo l'ascissa del punto di intersezione C fra la curva e la retta:

$\begin{cases} y = mx \\ y = x^3 - 3x + 2 \end{cases}$ ; $x^3 - 3x + 2 = mx$ , $x^3 - (3+m)x + 2 = 0$.

Quindi, detta t l'ascissa di C, deve essere: $t^3 - (3+m)t + 2 = 0$, $m = \frac{t^3-3t+2}{t}$

Deve inoltre essere:

$$Area = \frac{5}{4} = \int_t^0 [x^3 - 3x + 2 - mx]\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}mx^2\right]_t^0 =$$

$$= -\frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{1}{2}mt^2 = \frac{5}{4}$$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema:

$\begin{cases} t^3 - (3+m)t + 2 = 0 \\ t^4 - 6t^2 + 8t - 2mt^2 + 5 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} t^3 - 3t^2 - mt + 2 = 0 \\ m = \frac{t^4-6t^2+8t+5}{2t^2} \end{cases}$ ; $\begin{cases} m = \frac{t^3-3t+2}{t} \\ \dots . \end{cases}$ ; quindi:

$$\frac{t^3 - 3t + 2}{t} = \frac{t^4 - 6t^2 + 8t + 5}{2t^2} , \quad 2t^4 - 6t^2 + 4t = t^4 - 6t^2 + 8t + 5 ,$$

$t^4 - 4t - 5 = 0$

L'equazione ammette la radice x=-1; applicando la regola di Ruffini si ottiene:

$(t+1)(t^3-t^2+t-5) = 0$ (*)

Osserviamo che, essendo t<0, l'espressione $(t^3-t^2+t-5)$ è sempre negativa, quindi l'unica soluzione di (*) è t=-1.

Il punto C ha quindi ascissa -1. Da $m = \frac{t^3-3t+2}{t}$ otteniamo quindi: $m = -4$ .

La retta richiesta è quindi $y = -4x$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria