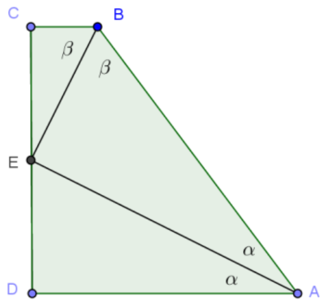
ORDINAMENTO 2005 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi. Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.



Risulta: $2\alpha + 2\beta = \pi \quad quindi \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ pertanto il triangolo ABE è rettangolo in E.
Il triangolo ABE è simile ai triangoli BCE e ADE; risulta in particolare:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BC} \quad da\ cui \quad AB = \frac{BE^2}{BC} \quad da\ cui \quad AB \cdot BC = BE^2$$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AD} \quad da\ cui \quad AB = \frac{AE^2}{AD} \quad da\ cui \quad AB \cdot AD = AE^2$$

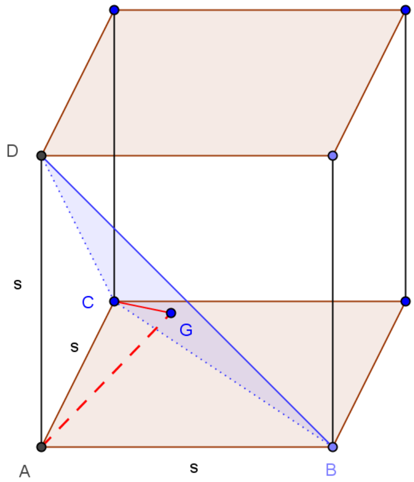
Sommando membro a membro nelle ultime due uguaglianze si ha:

$$AB \cdot BC + AB \cdot AD = BE^2 + AE^2 \quad \Longrightarrow \quad AB(BC + AD) = AB^2\,, \quad BC + AD = AB$$

Il lato obliquo è uguale alla somma delle due basi.

QUESITO 2

Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.



Il piede dell'altezza G relativa alla base BCD della piramide (retta) ABCD è l'ncentro del triangolo equilatero BCD, quindi anche il baricentro; per una nota proprietà del baricentro di un triangolo si ha che CG è i 2/3 della mediana uscente da C, che è anche altezza del triangolo equilatero BCD di lato $s\sqrt{2}$; l'altezza del triangolo BCD vale quindi: $(s\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} s\sqrt{6}$. Pertanto:

$$CG = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} s\sqrt{6}\right) = \frac{1}{3} s\sqrt{6}$$

Essendo AG perpendicolare al piano BCD, risulta AG perpendicolare a CG: il triangolo ACG è quindi rettangolo in G. Si ha allora:

$$AG^2 = AC^2 - CG^2 = s^2 - \left(\frac{1}{3} s\sqrt{6}\right)^2 = s^2 - \frac{2}{3}s^2 = \frac{1}{3}s^2 \quad \Longrightarrow \quad AG = \frac{s\sqrt{3}}{3}$$

QUESITO 3

Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $sinx\ cosx = \frac{1}{4}$.
Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ \ oppure: \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$
(k intero qualsiasi); Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ *(k intero qualsiasi).*
È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

Risolviamo l'equazione: $sinx\ cosx=\frac{1}{4}$, equivalente a $2sinx\ cosx=\frac{1}{2}$, $sen(2x)=\frac{1}{2}$ da cui:

$2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ oppure\ \ 2x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi\quad quindi$:

$x=\frac{\pi}{12}+k\pi\ \ oppure\ \ x=\frac{5}{12}\pi+k\pi$: quindi Alberto ha risposto correttamente.

Analizziamo la soluzione di Gianna.

Se k è pari la soluzione indicata da Gianna diventa:

$x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}+(2h)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}+h\pi$ (uguale alla prima soluzione data da Alberto).

Se k è dispari la soluzione indicata da Gianna diventa:

$x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{12}+(2h+1)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{12}\pi+h\pi$ (uguale alla seconda soluzione data da Alberto).

Quindi sia Alberto sia Gianna hanno risolto correttamente l'equazione.

QUESITO 4

Si consideri la seguente equazione in x: $(k-2)\,x^2-(2k-1)x+(k+1)=0$ dove k è un parametro reale diverso da 2.
Indicate con $x'\ ed\ x"$ le sue radici, calcolare i limiti di $x'+x"$ quando k tende a 2, a +∞ e a – ∞.

$(k-2)\,x^2-(2k-1)x+(k+1)=0$, con $k\neq 2$.

Determiniamo la somma delle radici, dopo aver verificato che il discriminante dell'equazione è non negativo:

$\Delta=(2k-1)^2-4(k-2)(k+1)=9\geq 0\ \ per\ ogni\ k$

$$x'+x"\ =-b/a\ =\frac{2k-1}{k-2}$$

Calcoliamo i limiti richiesti:

$$\lim_{k\to 2}(x'+x")=\lim_{k\to 2}\frac{2k-1}{k-2}=\infty$$

$$\lim_{k\to\pm\infty}(x'+x")=\lim_{k\to\pm\infty}\frac{2k-1}{k-2}=2$$

QUESITO 5

Il limite della funzione $(1-x)^{\frac{1}{x}}\ per\ x \to 0$*:*
[A] è uguale ad 1;
[B] è uguale a $+\infty$*;*
[C] non esiste;
[D] è uguale ad e*;*
[E] è uguale ad $\frac{1}{e}$*,*
essendo "e*" la base dei logaritmi naturali.*
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

Calcoliamo il limite proposto:

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+(-x))^{\frac{1}{-x}\cdot(-1)} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+(-x)\right)^{\frac{1}{-x}}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Ricordiamo che, se $f(x) \to 0$ allora $[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}$ tende ad e (conseguenza del limite notevole $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$).

La risposta corretta è quindi la *[E]* .

QUESITO 6

Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ *avente le seguenti caratteristiche:*
$f(1) = 1, f'(1) = 0, f''(1) < 0.$

Una possibile funzione si può ottenere dalla parabola di equazione:
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1: \quad a + b + c = 1$
$f'(x) = 2ax + b \quad \Longrightarrow \quad f'(1) = 2a + b = 0$
$f''(x) = 2a \quad \Longrightarrow \quad f''(1) < 0\,, \quad quindi \quad a < 0$

Pertanto:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2a+b=0 \\ a<0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -a+c=1 \\ b=-2a \\ a<0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c=1+a \\ b=-2a \\ a=-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

Un esempio di funzione con le caratteristiche richieste è: $f(x) = -x^2 + 2x$

QUESITO 7

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente $2x + my = 1$ e $mx - 2y = 2$, dove m è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di m?

Si tratta di due fasci propri di rette, con coefficienti angolari $-\frac{2}{m}$ ed $\frac{m}{2}$, che sono antireciproci; per ogni m le due corrispondenti rette del fascio sono quindi perpendicolari. Il luogo richiesto è quindi la circonferenza di diametro AB, con A e B centri dei due fasci.

La retta r di equazione $2x + my = 1$ ha centro $A = \left(\frac{1}{2}; 0\right)$ (ottenuto come intersezione delle generatrici corrispondenti ad m=0, 2x-1=0, e ad m che tende ad infinito, y=0).

La retta s di equazione $mx - 2y = 2$ ha centro $B = (0; -1)$ (ottenuto come intersezione delle generatrici corrispondenti ad m=0, -2y-2=0, e ad m che tende ad infinito, x=0).

La circonferenza di diametro AB ha centro in $C = \left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ e raggio:

$$R = AC = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{16}}.$$

L'equazione del luogo è quindi:

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + y = 0$$

Allo stesso risultato si perviene cercando il generico punto di intersezione delle due rette o, meglio, eliminando il parametro m tra le due equazioni del sistema:

$$\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx - 2y = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} m = \dfrac{1 - 2x}{y} \quad (con\ y \neq 0) \\ \dfrac{1 - 2x}{y} \cdot x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$\frac{1 - 2x}{y} \cdot x - 2y = 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2x^2 - 2y^2 = 2y \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 - x + 2y = 0$$

Se y=0 il sistema precedente fornisce il seguente punto:

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$ che appartiene alla circonferenza precedente.

QUESITO 8

È vero o falso che le due funzioni $\ln(x^2-4)$ *e* $\ln(x+2)-\ln(x-2)$ *hanno lo stesso grafico? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.*

E' falso.

La funzione $\ln(x^2-4)$ è definita per $x^2-4>0 \;\; cioè \quad x<-2 \;\; vel \;\; x>2$

La funzione $\ln(x+2)-\ln(x-2)$ è definita per

$$\begin{cases} x>-2 \\ x>2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x>2$$

QUESITO 9

Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$*, ordinati secondo le potenze decrescenti di* a *e crescenti di* b*, sono rispettivamente:*

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ a^1b^9,\ b^{10}.$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

Lo sviluppo della potenza del binomio $(a+b)^{10}$ è dato da:

$$(a+b)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}a^k b^{n-k}$$

I coefficienti dei termini indicati si ottengono per k=0, 1, 2, …,10 e quindi sono:

$$\binom{10}{0}=1,\binom{10}{1}=10,\binom{10}{2},\binom{10}{3},\dots,\binom{10}{9}=10,\binom{10}{10}=1.$$

QUESITO 10

Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

Il numero di terne di femmine è dato dalle combinazioni semplici di 15 oggetti a 3 a 3, cioè:

$$C_{15,3} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = 455$$

Il numero di coppie di maschi è dato dalle combinazioni semplici di 12 oggetti a 2 a 2, cioè:

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2!} = 66$$

Le possibili delegazioni sono pari a:

$$C_{15,3} \cdot C_{12,2} = 455 \cdot 66 = 30030$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri