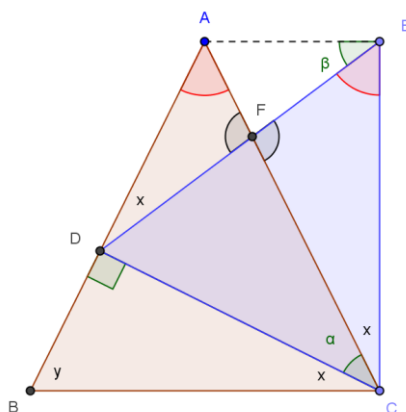


ORDINAMENTO 2005 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

Considerato un triangolo ABC , acutangolo e isoscele sulla base BC , si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC , il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC .



a)

Dimostrare che:

- 1) EC è perpendicolare a CB ;
- 2) i triangoli EFC e AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED e AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli AEF e FCD sono congruenti;
- 3) EA è parallela a CB ;
- 4) il quadrilatero $AECD$ è inscrittibile in una circonferenza.

1) Dalla similitudine fra i triangoli ECD ed ABC segue che l'angolo ECD è congruente all'angolo ABC ; quindi l'angolo $ECA=x$ è congruente all'angolo $BCD=x$. Ma risulta: $\alpha + x = y$ ed $x + y = \frac{\pi}{2}$, quindi: $x + \alpha + x = \frac{\pi}{2}$ segue che EC è perpendicolare a BC .

2) Dato che gli angoli DAF e DEC sono congruenti (essendo i triangoli ABC e CDE simili), essendo gli angoli AFD e CFE congruenti perché opposti al vertice, segue che i triangoli AFD ed EFC sono simili. Da questa similitudine segue la seguente proporzione: $AF:FE=DF:FC$. Ma l'angolo AFE è congruente all'angolo DFC , quindi i triangoli EFA e CFD sono simili poiché hanno un angolo congruente ed i lati che lo comprendono proporzionali. Siccome AF e DF si corrispondono nella similitudine tra EFA e CFD , segue che gli angoli corrispondenti (AEF ed FCD) sono congruenti.

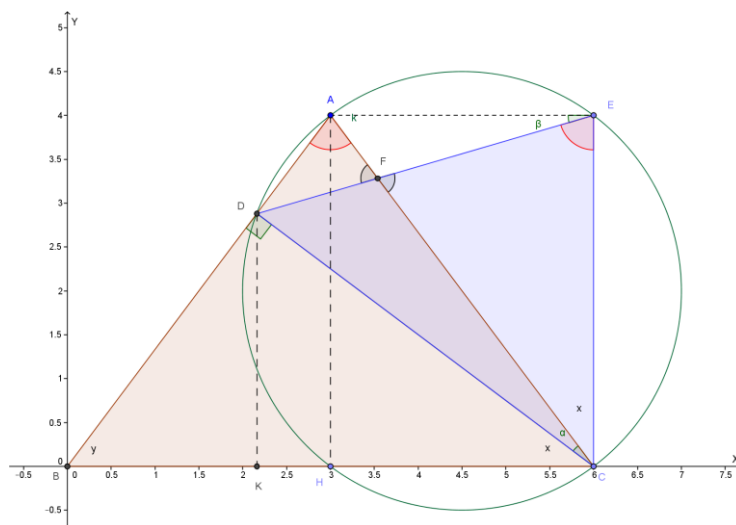
- 3) Siccome α è complementare di DAC, anche l'angolo AEF, congruente ad α è complementare di AEF, quindi anche dell'angolo congruente CED: segue che AE è perpendicolare ad EC, quindi AE è parallela a CB.
- 4) Ricordiamo che un quadrilatero è inscritto in una circonferenza se, e solo se, gli angoli opposti sono supplementari. Nel nostro caso gli angoli opposti AEC e ADC sono retti, quindi supplementari; di conseguenza anche gli altri due lati opposti, DAE e DCE sono supplementari (la somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è due angoli piatti): il quadrilatero AECD è quindi inscritto in una circonferenza.

b)

Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:

- 1) le coordinate dei punti A, B, C, D, E;
- 2) l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrilatero AECD.

Un conveniente sistema di riferimento è quello con l'origine degli assi in B, asse x coincidente con la retta BC e asse y coincidente con la retta perpendicolare in B a BC:



Dai dati forniti si calcola BD:

$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \sqrt{36 - \frac{576}{25}} = \sqrt{\frac{324}{25}} = \frac{18}{5}$$

Osserviamo ora che i triangoli BCD e ABH sono simili, quindi;

$$AH: BH = CD: BD, \quad AH: 3 = \frac{24}{5} : \frac{18}{5}, \quad AH = 4.$$

Calcoliamo DK per trovare l'ordinata di D; essendo l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo ACD risulta:

$$DK = \frac{BD \cdot DC}{BC} = \frac{\frac{18}{5} \cdot \frac{24}{5}}{6} = \frac{72}{25}$$

Per trovare l'ascissa BK di D applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo BDK:

$$BK = \sqrt{BD^2 - KD^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - \left(\frac{72}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{324}{25} - \frac{5184}{625}} = \sqrt{\frac{2916}{625}} = \frac{54}{25}$$

Le coordinate dei punti richiesti sono pertanto:

$$A = (3; 4), \quad B = (0; 0), \quad C = (6; 0), \quad D = \left(\frac{54}{25}; \frac{72}{25}\right), \quad E = (6; 4).$$

Cerchiamo l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrilatero AECD.

Dato che l'angolo ADC è retto, il segmento AC è un diametro. Quindi il raggio R è la metà di AC ed il centro è il punto medio M di AC:

$M = \left(\frac{9}{2}; 2\right)$; $AC = AB = 5$; $R = \frac{5}{2}$. Quindi la circonferenza ha equazione:

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{4}, \quad x^2 + y^2 - 9x - 4y + 18 = 0$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria