## ORDINAMENTO 2005 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

*Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:*

*[1]* $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$.

### a)

*Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.*

Cerchiamo il punto d'intersezione con l'asse y.
Ponendo $x = 0$ in [1] otteniamo: $A = (0; c)$.
Indicata con y=f(x) l'equazione della generica curva, abbiamo:

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx\,, \quad da\ cui\colon\ f'(0) = 0$

La tangente in A ha quindi equazione: $y - c = f'(0)(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = c$. Quindi la tangente in A è parallela all'asse x per tutte le curve.

### b)

*Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.*

Calcoliamo la derivata seconda della funzione:

$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b > 0 \quad per\ ogni\ x\ se\ il\ delta$ è $negativo$, quindi:

$\frac{\Delta}{4} = 9a^2 - 24b < 0\,, \quad 3a^2 - 8b < 0$.

La concavità potrebbe essere rivolta verso le y positive anche se la derivata seconda si annulla in un punto, in tal caso bisogna analizzare la derivata prima o le derivate successive. La derivata seconda si annulla in un punto se $3a^2 - 8b = 0$, ed il punto in questione è: $x = -\frac{3a}{12} = -\frac{a}{4}$.
La derivata terza della funzione è:
$f'''(x) = 24x + 6a$; valutiamola in $x = -\frac{a}{4}$: $f'''\left(-\frac{a}{4}\right) = -6a + 6a = 0$. Quindi non possiamo dire niente. Analizziamo la derivata quarta:
$f^{iv}(x) = 24 > 0$: quini la prima derivata che non si annulla in $x = -\frac{a}{4}$ è di ordine pari, pertanto in tale non abbiamo un flesso (in particolare abbiamo un minimo, poiché la

derivata terza è positiva): quindi anche quando $3a^2 - 8b = 0$ il grafico della funzione volge la concavità verso le y positive. Concludendo:

la curva data volge la concavità verso le y positive se $3a^2 - 8b \leq 0$

## c)

*Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate (2; 2).*

Il punto in cui la curva taglia l'asse y è il punto $A = (0; c)$. Affinché in tale punto ci sia un flesso è necessario che la derivata seconda si annulli:
$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$
La tangente inflessionale in A ha equazione:

$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y - c = 0(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = c$ . Tale retta passa per (2;2) se c=2. Inoltre la curva deve passare per (2;2), quindi:

$2 = 16 + 8a + 4b + c, da\ cui, essendo\ b = 0\ e\ c = 2:\ a = -2$. Quindi:

$a = -2, b = 0\ e\ c = 2 \quad \Rightarrow \quad y = x^4 - 2x^3 + 2$

## d)

*Indicata con K la curva trovata, stabilire com'è situata rispetto all'asse x, fornendo una esauriente spiegazione della risposta.*

In base a quanto visto nel punto precedente risulta:

$K: y = x^4 - 2x^3 + 2$

Cerchiamo le eventuali intersezioni con l'asse x:

$x^4 - 2x^3 + 2 = 0$ : questa equazione può essere risolta solo graficamente. Analizziamo la derivata prima:

$y' = 4x^3 - 6x^2 \geq 0 \quad se \quad 2x^2(2x - 3) \geq 0$ se $x \geq \frac{3}{2}$ e $y' = 0 \quad se\ x = 0 \quad e \quad x = \frac{3}{2}$
Quindi la funzione è crescente se $x > \frac{3}{2}$ , decrescente se $x < \frac{3}{2}$ ; abbiamo un flesso a tangente orizzontale in $x = 0$ ed un minimo se $x = \frac{3}{2}$ . Le ordinate di tali punti sono:
se $x = 0, y = 2; \quad se\ x = \frac{3}{2}\ ,\ y = \frac{81}{16} - \frac{27}{4} + 2 = \frac{5}{16}$.
Analizziamo la derivata seconda:

$y'' = 12x^2 - 12x \geq 0\ \ se\ \ x \leq 0\ \ vel\ \ x \geq 1$ : quindi in x=0 (y=2) e x=1 (y=1) abbiamo dei flessi. La concavità della curva è verso l'alto se x<0 e x>1, verso il basso se 0<x<1.
Dalle considerazioni svolte segue che la curva K è tutta al di sopra dell'asse x.

Il grafico di K è il seguente:

## e)

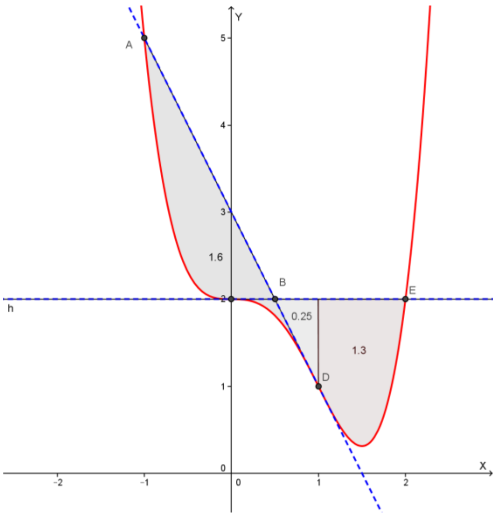
*Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.*

Abbiamo già visto nel punto precedente che la curva presenta, oltre al flesso (0;2) il flesso (1;1).

La tangente in (0;2) ha equazione y=2, trattandosi, come già osservato, di un flesso a tangente orizzontale. La tangente in (1;1) ha equazione:

$$y-1=f'(1)(x-1) \quad \Rightarrow \quad y-1=-2(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=-2x+3$$

La regione delimitata dalle due tangenti inflessionali e dalla curva K è indicata nella seguente figura:




Cerchiamo l'ascissa dell'intersezione A fra K e la tangente in (1;1):

$$\begin{cases} y = x^4-2x^3+2 \\ y=-2x+3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^4-2x^3+2x-1=0$$

$$x^4-1-2x(x^2-1)=0, \quad (x^2-1)(x^2+1-2x)=0$$

$$(x+1)(x-1)^3=0, \qquad quindi \;\; x_A=-1$$

Cerchiamo l'ascissa di B intersecando le due tangenti inflessionali: se y=2 si ha x=1/2.

L'area richiesta si ottiene quindi nel seguente modo:

$$\int_{-1}^{1}[-2x+3-(x^4-2x^3+2)]\,dx+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+\int_{1}^{2}[2-(x^4-2x^3+2)]\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^4+2x^3-2x+1)\,dx+\frac{1}{4}+\int_{1}^{2}(-x^4+2x^3)\,dx=$$

$$=\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-x^2+x\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{4}+\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}\right]_{1}^{2}=\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-1+1\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-1-1\right)+\frac{1}{4}+$$

$$+\left(-\frac{32}{5}+8\right)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{63}{20}\,u^2=3.15\,u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria