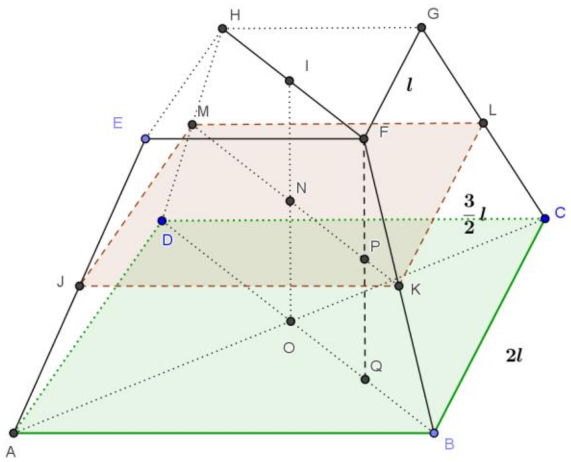
ORDINAMENTO 2005 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano a equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.



Se la base maggiore ha area quadrupla della base minore, il suo lato è il doppio di quello della base minore. Posto $FG = l\ ,\ risulta\ \ BC = 2l$

La proiezione di F sulla base maggiore incontra OB nel punto medio Q (essendo OB il doppio di IF ed OQ=IF). Indicata con P l'intersezione fra FQ ed NK, dalla similitudine fra i triangoli FPK ed FQB si ha:

$BQ:PK = FQ:FP = 2$, quindi: $PK = \frac{1}{2}BQ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}OB\right) = \frac{1}{2}IF,\ quindi$:

$$NK = NP + PK = IF + \frac{1}{2}IF = \frac{3}{2}IF. Segue\ che: KL = \frac{3}{2}l$$

Passiamo quindi a calcolare i volumi dei due tronchi di piramide, ponendo per comodità $IN = NO = h$. Il tronco di basi ABCD e JKLM ha volume:

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(BC^2 + KL^2 + \sqrt{BC^2 \cdot KL^2}\right) \cdot h = \frac{1}{3}\left(4l^2 + \frac{9}{4}l^2 + 2l \cdot \frac{3}{2}l\right)h = \frac{1}{3}h\left(\frac{37}{4}l^2\right) =$$

$$= \frac{37}{12}hl^2 = V_1$$

Calcoliamo ora il volume del tronco di piramide di basi JKLM ed EFGH:

$$V_2 = \frac{1}{3}\left(FG^2 + KL^2 + \sqrt{FG^2 \cdot KL^2}\right) \cdot h = \frac{1}{3}\left(l^2 + \frac{9}{4}l^2 + l \cdot \frac{3}{2}l\right) h = \frac{1}{3}h\left(\frac{19}{4}l^2\right) =$$

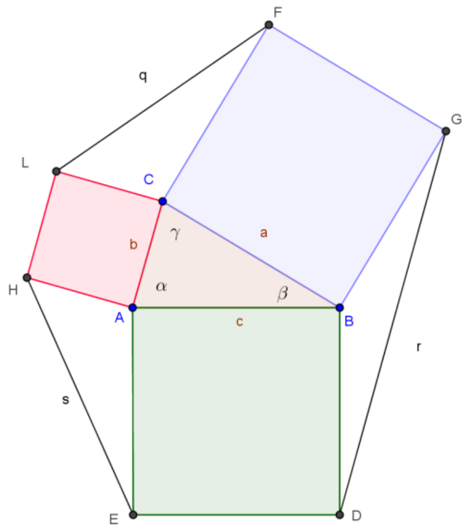
$$= \frac{19}{12}hl^2 = V_2$$

Il rapporto fra i volumi dei due tronchi è pertanto calcolabile ed è:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{37}{12}hl^2}{\frac{19}{12}hl^2} = \frac{37}{19}$$

QUESITO 2

Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente ad esso si costruiscano i tre quadrati ABDE, BCFG e CAHL. Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli AHE, BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC.



Calcoliamo le aree dei triangoli in oggetto mediante la trigonometria, secondo cui *l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso*.

$$A(AHE) = \frac{1}{2}bc \cdot sen(EAH) = \frac{1}{2}bc \cdot sen(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}bc \cdot sen(\alpha) = A(ABC)$$

$$A(BDG) = \frac{1}{2}ac \cdot sen(DBG) = \frac{1}{2}ac \cdot sen(\pi - \beta) = \frac{1}{2}ac \cdot sen(\beta) = A(ABC)$$

$$A(CFL) = \frac{1}{2}ab \cdot sen(FCL) = \frac{1}{2}ab \cdot sen(\pi - \gamma) = \frac{1}{2}ab \cdot sen(\gamma) = A(ABC)$$

QUESITO 3

Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente:

$$log_2 27 + log_2 12 \ , \quad 2 + log_2 81$$

Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

Risultato Luca: $log_2 27 + log_2 12 = log_2 3^3 + log_2 3 \cdot 4 = 3\, log_2 3 + log_2 3 + log_2 4 =$

$= 4\, log_2 3 + log_2 2^2 = 4\, log_2 3 + 2\, log_2 2 = 4\, log_2 3 + 2$

Risultato Claudia: $2 + log_2 81 = 2 + log_2 3^4 = 2 + 4\, log_2 3$

Quindi i risultati ottenuti da Luca e Claudia sono uguali.

QUESITO 4

Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a\, sen^2 x + b\, senx\, cosx + c\cos^2 x$ *, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?*

Ricordiamo che una funzione sinusoidale è riconducibile alla forma:

$y = A \cdot sen(\alpha x + \beta)$ (1)

Tenendo presenti le formule di bisezione e di duplicazione la funzione può essere scritta nella forma:

$$y = a\left(\frac{1 - cos2x}{2}\right) + \frac{1}{2} bsen2x + c\left(\frac{1 + cos2x}{2}\right) = \frac{1}{2}(a - a\, cos2x + bsen2x + c + c\, cos2x)$$

$$y = \frac{1}{2}[b\, sen2x + (c - a)cos2x + a + c]$$

Se b=0 e a=c (ma diversi da zero) la funzione si riduce alla retta di equazione:

$y = \frac{1}{2}(a + c)$, quindi non è una funzione sinusoidale.

La funzione data non è sinusoidale neanche quando $a + c \neq 0, cioè\ a \neq -c$.
Analogamente non è sinusoidale se $b = 0\ e\ c - a \neq 0$ oppure se $b = 0\ e\ c - a \neq 0$

In tutti gli altri casi la funzione si può ricondurre alla forma (1). Ricordiamo infatti che la funzione lineare in seno e coseno, di equazione $y = a\ senx + b\ cosx$ si può sempre ricondurre alla forma $y = A \cdot sen(x+\alpha)$ supponendo a>0 (altrimenti si raccoglie -1) ponendo $A = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad e \quad$ $\alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$.

QUESITO 5

Determinare il più grande valore dell'intero n per cui l'espressione

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k$$

non supera 10000.

La sommatoria data equivale a:

$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$

Ed è quindi la somma dei primi n+1 termini di una progressione geometrica di ragione q=3 e primo termine $a_1 = 1$. Tale somma sappiamo che è uguale a:

$$a_1 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

L'espressione data non supera quindi 10000 se:

$$\frac{3^{n+1}-1}{2} \leq 10000\,,\quad 3^{n+1} \leq 20001\,, (n+1)\ln(3) \leq \ln(20001)\,, n \leq \frac{\ln(20001)}{\ln(3)} - 1 \cong 8.01$$

Deve quindi essere $n \leq 8 : il\ più\ grande\ valore\ di\ n\ è\ 8$.

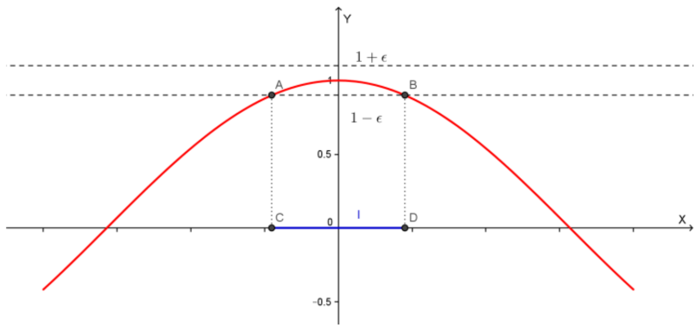
QUESITO 6

Dimostrare che il limite di cos x, per x tendente a 0, è 1, esplicitando ciò che si ammette.

In base alla definizione di limite, dimostriamo che:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ un\ intorno\ I\ di\ x = 0\ dipendente\ da\ \epsilon, tale\ che, \forall x \in I(x \neq 0)\ risulti$:
$|cosx - 1| < \varepsilon$

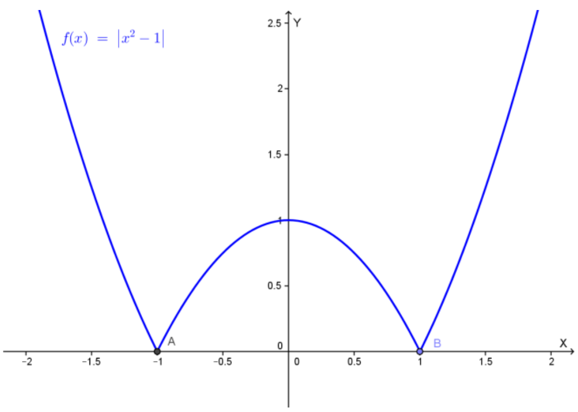
La disequazione $|cosx - 1| < \varepsilon$ (equivale a $1 - \epsilon < cosx < 1 + \epsilon$) con $\varepsilon > 0$ piccolo quanto si vuole, è in effetti verificata in un intorno di x=0, come si può notare dal grafico seguente:



QUESITO 7

Determinare il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ *.*

La funzione ha il seguente grafico:



Dal grafico si evince facilmente che la funzione non è derivabile in x=1 ed in x= -1 (dove ci sono, in particolare dei punti angolosi).

Il dominio di derivabilità è quindi $x \neq \pm 1$

QUESITO 8

Sia f(x) una funzione continua per ogni x reale tale che $\int_0^2 f(x)dx = 4$ *.*
Dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f(2x)dx \quad e \quad \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Dire quale e spiegarne la ragione.

Poniamo $2\mathrm{x} = \mathrm{t}$, da cui $\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\mathrm{dt}$, se $\mathrm{x} = 0$ $\mathrm{t} = 0$ e se $\mathrm{x} = 1$ $\mathrm{t} = 2$ quindi:

$$\int_0^1 f(2x)dx = \int_0^2 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Per valutare il secondo integrale procediamo allo stesso modo:
Poniamo $\frac{\mathrm{x}}{2} = \mathrm{t}$, da cui $\mathrm{dx} = 2\mathrm{dt}$, se $\mathrm{x} = 0$ $\mathrm{t} = 0$ e se $\mathrm{x} = 1$ $\mathrm{t} = \frac{1}{2}$ quindi:

$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, 2dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$: non calcolabile a partire dall'integrale dato.

Quindi a partire dall'integrale dato si può calcolare solo il primo integrale.

QUESITO 9

Dimostrare la seguente formula:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

dove n, k sono numeri naturali tali che 0<k<n.
Essa spiega una delle regole sulle quali è basata la costruzione del "triangolo di Tartaglia" (da Niccolò Fontana, detto ***Tartaglia****, 1505 ca. – 1557): enunciarla.*

Ricordiamo che:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,k(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)} = \frac{(n-1)!\,(n-k) + (n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Il Triangolo di Tartaglia può essere descritto come un triangolo isoscele formato da tante righe, con 1 nel vertice (riga zero) e all'inizio e alla fine di ogni riga (quindi 1 sui lati uguali del triangolo). Nella seconda riga (riga 1) abbiamo 1 e 1. Dalla terza riga in poi gli altri elementi si ottengono sommando i due numeri sovrastanti a destra e a sinistra. I numeri presenti in ogni riga sono i coefficienti dello sviluppo del binomio di Newton $(a+b)^n$, che, ricordiamo, sono i coefficienti binomiali $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n} = 1.$

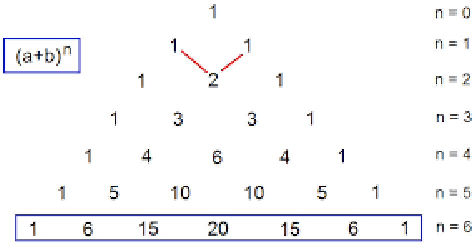


Fig. 1

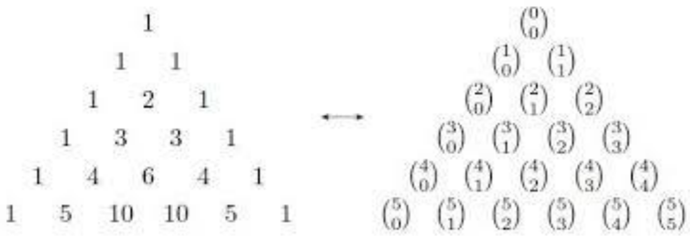


Fig.2

Il triangolo di Tartaglia è perciò utilizzato per determinare i coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$:

$(a+b)^0 = 1 : riga\ \ n = 0$
$(a+b)^1 = a + b : riga\ n = 1$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
ecc.

La formula $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ permette di calcolare l'elemento di posto k nella riga n sommando gli elementi di posto k e k-1 della riga (n-1). Per esempio (si veda la fig. 2):

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$$

QUESITO 10

Calcolare quante sono le possibili "cinquine" che si possono estrarre da un'urna contenente i numeri naturali da 1 a 90, ognuna delle quali comprenda però i tre numeri 1, 2 e 3.

Consideriamo una qualsiasi cinquina che contiene 1,2 e 3; gli altri due numeri (fra gli 87 rimanenti) possiamo sceglierli in numero pari alle combinazioni di 87 oggetti a 2 a 2, quindi sono:

$$C_{87,2} = \frac{87 \cdot 86}{2!} = 87 \cdot 43 = 3741.$$

Le cinquine con 1, 2 e 3 sono quindi 3741.

Con la collaborazione di Angela Santamaria