

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

a.s. 2004/2005

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

a) Dimostrare che:

1) EC è perpendicolare a CB;

2) I triangoli EFC ed AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED ed AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $\hat{A}EF$ e $\hat{F}CD$ sono congruenti;

3) EA è parallela a CB;

4) Il quadrilatero AECD è inscritto in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto ad un'assegnata unità di misura, siano $\frac{24}{5}$,

dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:

1) le coordinate dei punti A, B, C, D, E;

2) l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrilatero AECD.

PROBLEMA 2.

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$[1] \quad y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c.$$

a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.

b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.

c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui secca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la secchi ulteriormente nel punto di coordinate (2, 2).

d) Indicata con K la curva trovata, stabilire com'è situata rispetto all'asse x, fornendo una esauriente spiegazione della risposta.

e) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

QUESTIONARIO.

1. Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano a equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α .
2. Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente ad esso si costruiscano i tre quadrati ABDE, BLFG e CAHL. Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli AHE, BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC.
3. Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente:

$$\log_2 27 + \log_2 12, \quad 2 + \log_2 81.$$

Ammettendo che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

4. Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

5. Determinare il più grande valore dell'intero n per cui l'espressione $\sum_{k=0}^n 3^k$ non supera 10000.

6. Dimostrare che il limite di $\cos x$, per x tendente a 0, è 1, esplicitando ciò che si ammette.

7. Determinare il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$.

8. Sia $f(x)$ una funzione continua per ogni x reale tale che $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f(2x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Dire quale e spiegarne la ragione.

9. Dimostrare la seguente formula:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

dove n, k sono numeri naturali tali che $0 < k < n$.

Essa spiega una delle regole sulle quali è basata la costruzione del "triangolo di

Tartaglia" (da Niccolò Fontana, detto **Tartaglia**, 1505 ca. – 1557): enunciarla.

10. Calcolare quante sono le possibili "cinquine" che si possono estrarre da un'urna contenente i numeri naturali da 1 a 90, ognuna delle quali comprenda però i tre numeri 1, 2 e 3.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.