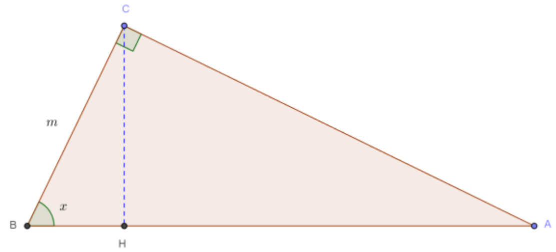
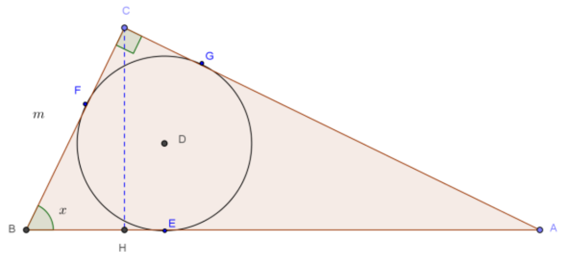
Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2006 – PROBLEMA 1

Il triangolo ABC è rettangolo in C ed è CB= m.



1)

Posto $A\hat{B}C = x \;\; e \;\; t = tg\frac{x}{2}$ *, si esprima il raggio y del cerchio inscritto nel triangolo in funzione di t.*



Ricordiamo che, detta S l'area del triangolo, r il raggio del cerchio inscritto e p il semiperimetro del triangolo, risulta: $S = pr,\;\; quindi:\; r = \frac{S}{p}$. Risulta:

$$AC = mtgx\,, \quad AB = \frac{m}{cosx}\,, \quad S = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{1}{2}m^2 tgx\,, \quad 2\,p = m + mtgx + \frac{m}{cosx}$$

Pertanto:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}m^2 tgx}{\frac{1}{2}\left(m + mtgx + \frac{m}{cosx}\right)} = \frac{m\,tgx}{1 + tgx + \frac{1}{cosx}} = m \cdot \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{1 + \frac{2t}{1-t^2} + \frac{1+t^2}{1-t^2}} =$$

$$= m \cdot \frac{2t}{1 - t^2 + 2t + 1 + t^2} = \frac{mt}{t+1} = r, con\; t \neq \pm 1$$

Essendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, risulta $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$, quindi $0 < tg\frac{x}{2} < 1$: $\;0 < t < 1$

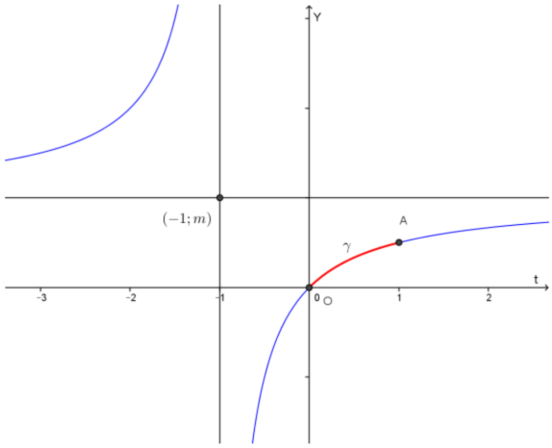
2)

Si studi y = f (t) e se ne tracci il grafico senza tener conto dei limiti geometrici del problema; si denoti, poi, con γ*, l'arco del grafico che corrisponde a tali limiti* t_1 *e* t_2 *.*

Si ha:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{mt}}{\boldsymbol{t}+\boldsymbol{1}}\,, \quad con\, m > 0; \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1, \quad 0 < t < 1$$

Si tratta di una funzione omografica con centro in $C = (-1; m)$ e passante per l'origine degli assi cartesiani. Il suo grafico (con evidenziato l'arco γ) è il seguente:



3)

Si determini il valore del parametro m in modo che l'area della regione delimitata da γ *e dall'asse t fra* t_1 *e* t_2 *sia uguale a* $4 - log16$ *.*

L'area richiesta è data da:

$$\int_0^1 \frac{mt}{t+1}dt = m\int_0^1 \frac{t}{t+1}dt = m\int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1}dt = m\int_0^1 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= m[t - \ln|t+1|]_0^1 = m(1 - ln2)$$

Deve essere:

$m(1 - ln2) = 4 - log16, \;\; m = \frac{4-log16}{1-ln2} = \frac{4-4ln2}{1-ln2} = 4 = m$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria