Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2006

QUESITO 1

Si vogliono colorare, con colori diversi, le facce di un tetraedro e le facce di un cubo. In quanti modi ciò è possibile disponendo di dieci colori e prescindendo dal loro ordine?

Le facce del tetraedro possono essere colorati in un numero di modi pari alle COMBINAZIONI (semplici) di 10 oggetti (il numero dei colori) a 4 a 4 (il numero delle facce). Ad ogni possibile colorazione del tetraedro corrisponde una sola colorazione del cubo: usando 4 colori per il tetraedro, rimangono gli altri 6 colori per il cubo. Quindi il numero richiesto è dato da:

$$C_{10,4}=\frac{10(9)(8)(7)}{4!}=210\,.$$

QUESITO 2

La somma di due numeri è s; determinate i due numeri in modo che la somma dei loro cubi sia minima.

$x+y=s \quad con \;\; 0\leq x\leq s \;\; e \;\; 0\leq y\leq s$

Deve essere: $z=x^3+y^3=minima$.

METODO ELEMENTARE

Osserviamo che:

$z=x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3-3xy(x+y)=s^3-3xy(s)$

Essendo s^3 costante, z è minima se $3xy(s)$ è massimo, cioè se è massimo xy. Ma sappiamo che se la somma di due numeri è costante il loro prodotto è massimo quando i due numeri sono uguali. Pertanto:
se la somma di due numeri è costante la somma dei loro cubi è minima quando i due numeri sono uguali.

METODO CON L'USO DELLE DERIVATE

Da $x+y=s$ ricaviamo $y=s-x$ quindi: $z=x^3+y^3=x^3+(s-x)^3$, con $0\leq x\leq s$.
Risulta: $z'=3x^2+3(s-x)^2(-1)=3x^2-3(s^2-2sx+x^2)\geq 0$ se
$x^2-(s^2-2sx+x^2)\geq 0$; $2sx-s^2\geq 0$, $x\geq\frac{s}{2}$. Quindi z è decrescente per $0\leq x<\frac{s}{2}$

e crescente per $\frac{s}{2} < x \leq s$.

Quindi z è massima se $x = \frac{s}{2}$ e $y = s - x = s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}$: cioè se x=y.

QUESITO 3

Per quale o quali valori di x, con $90° < x \leq 450°$, è vero che:

a) $2cos5x = 1$*;* *b)* $2cos5x > 1$*.*

Risulta $2cos5x = 1$ se $cos5x = \frac{1}{2}$ da cui: $5x = 60° + k360°$ e $5x = 300° + 360°k$ con k intero relativo. Quindi si hanno le seguenti soluzioni:

$5x = 60° + 360°k$, $x = 12° + k72°$; sono accettabili i valori k= 2, 3, 4, 5, 6 che danno luogo alle seguenti soluzioni:

$$x = 156°, \quad x = 228°, \quad x = 300°, \quad x = 372°, \quad x = 444°$$

$5x = 300° + 360°k$, $x = 60° + k72°$; sono accettabili i valori k=1, 2, 3, 4, 5 che danno luogo alle seguenti soluzioni:

$$x = 132°, \quad x = 204°, \quad x = 276°, \quad x = 348°, \quad x = 420°, \quad x = 444°$$

Risolviamo ora la disequazione $2cos5x > 1$ per $90° < x \leq 450°$. Si ha:

$cos5x > \frac{1}{2},\ da\ cui$ $\quad -60° + k360° < 5x < 60 + k360°$ da cui:

$$-12° + k72° < x < 12 + k72°$$

Cerchiamo le soluzioni nell'intervallo richiesto:

$k = 2$: $132° < x < 156°$, $k = 3$: $204° < x < 228°$, $k = 4$: $276° < x < 300°$
$k = 5$: $348° < x < 372°$, $k = 6$: $420° < x < 444°$

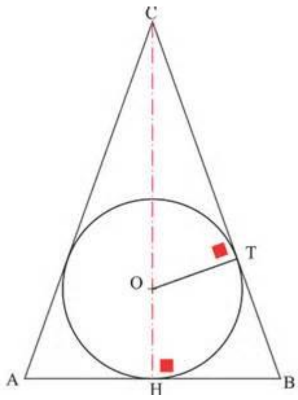
QUESITO 4

Fra tutti i coni circoscritti ad una data sfera, trovare quello di volume di volume minimo.

Detto R il raggio della sfera data, poniamo l'altezza CH del cono uguale ad x: CH=x, con x>2R. Per la similitudine fra i triangoli HBC e TCO risulta:

CT:OT=CH:BH ; inoltre: $CT = \sqrt{OC^2 - OT^2} = \sqrt{(x-R)^2 - R^\wedge 2} = \sqrt{x^2 - 2Rx}$
Pertanto:

$$\sqrt{x^2 - 2Rx} : R = x : BH \quad , \qquad BH = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} = \frac{R\sqrt{x^2 - 2Rx}}{x - 2R}$$



Il volume del cono è pertanto:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot BH^2 \cdot CH = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x}{x - 2R} \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x^2}{x - 2R}, \quad con\ x > 2R$$

Tale volume è minimo se lo è:

$$y = \frac{x^2}{x - 2R}$$

$$y' = \frac{x(x - 4R)}{(x - 2R)^2} \geq 0 \quad se \quad x \geq 4R$$

Quindi y è crescente se $x > 4R$ e decrescente se $0 < x < 4R$: $x = 4R$ è punto di minimo assoluto.

Il volume del cono circoscritto alla sfera di raggio R è minimo quando la sua altezza è uguale a 4R; il volume del cono vale in tal caso $\frac{8}{3}\pi R^3$.

QUESITO 5

E' assegnata l'equazione $(m - 1)x^2 - (m - 5)x + m - 1 = 0$. Per quali valori del parametro m le radici appartengono all'intervallo [-2; -1].

Il quesito richiama il metodo di **Tartinville**, molto meccanico ed oramai desueto, che preferiamo non utilizzare.

Metodo algebrico diretto

L'equazione ammette radici se $\Delta \geq 0$, quindi: $(m - 5)^2 - 4(m - 1)^2 \geq 0$,

$21-2m-3m^2 \ge 0\,,\quad 3m^2+2m-21 \le 0\,,\qquad -3 \le m \le \frac{7}{3}$

Le radici dell'equazione sono: $x = \frac{m-5\pm\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)}$. Deve quindi essere:

$$\begin{cases} \frac{m-5-\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \ge -2 \\ \frac{m-5-\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \le -1 \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{m-5+\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \ge -2 \\ \frac{m-5+\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \le -1 \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases}$$

Questi due sistemi equivalgono a:

$$1)\begin{cases} \frac{5m-9-\sqrt{21-2m-3m^2}}{(m-1)} \ge 0 \\ \frac{3m-7-\sqrt{21-2m-3m^2}}{(m-1)} \le 0 \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad 2)\begin{cases} \frac{5m-9+\sqrt{21-2m-3m^2}}{(m-1)} \ge 0 \\ \frac{3m-7+\sqrt{21-2m-3m^2}}{(m-1)} \le 0 \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} -3 \le m < 1,\ \ \frac{15}{7} \le m \le \frac{7}{3} \\ 1 < m \le \frac{7}{3} \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases} \quad : \quad \frac{15}{7} \le m \le \frac{7}{3}$$

$$2)\begin{cases} -3 \le m < 1,\ \ 1 < m \le \frac{7}{3} \\ m = \frac{7}{3} \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases} \quad : \quad m = \frac{7}{3}$$

Le radici dell'equazione appartengono all'intervallo [-2; -1] se $\frac{15}{7} \le m \le \frac{7}{3}$.

Metodo grafico

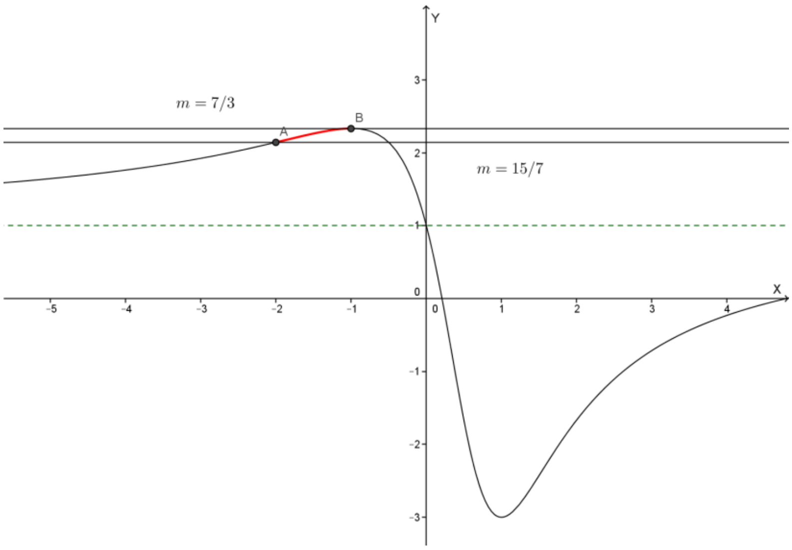
L'equazione può essere scritta nella forma:

$mx^2 - x^2 - mx + 5x + m - 1 = 0\,,\quad m(x^2-x+1) = x^2-5x+1\ ,\quad m = \frac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$

Quindi dobbiamo risolvere graficamente il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1} \\ y = m \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

Studiata sommariamente la funzione y=f(x), abbiamo la seguente situazione grafica (A e B sono i punti di ascissa -2 e -1):



Essendo $f(-2) = \frac{15}{7}$ $\;ed\;$ $f(-1) = \frac{7}{3}$ possiamo concludere che le radici dell'equazione appartengono all'intervallo [-2; -1] se $\frac{15}{7} \leq m \leq \frac{7}{3}$.

QUESITO 6

Si dia una definizione del numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)] e si dimostri che la derivata di e^x è e^x.

Il numero di Nepero si definisce mediante il seguente limite:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

Applicando la definizione di derivata alla funzione $f(x) = e^x$ si ottiene:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x$$

Si ricordi il limite notevole $\mathbf{\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h} = 1}$

Approfondimento

L'importanza principale di **"e"** (un numero trascendente le cui prime cifre decimali sono $\mathbf{2.718281828459}$) risiede nel fatto che è la base dei logaritmi naturali, detti "**neperiani**" dal suo fondatore **Nepero.**

Il valore di **e** a partire dal limite indicato è stato introdotto da **J. Bernoulli.**
La lettera **e** per indicare questa costante è stata introdotta da Eulero (ma non pare che l'abbia fatto perché iniziale del suo nome), inizialmente era indicata con la lettera **b**.

La presenza di **"e"** è molto diffusa in matematica e nelle scienze sperimentali.
Essa compare nella rappresentazione esponenziale dei numeri complessi:

$$a + ib = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\ sen\ \vartheta)$$

Da questa espressione si ottiene (con $\rho = 1\ e\ \theta = \pi$) la celebre relazione di Eulero:

$$\boldsymbol{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

che contiene in una stessa formula i cinque simboli più diffusi della matematica:
$\boldsymbol{e, i, \pi, 1, 0}$.

La costante **e** compare per esempio nella distribuzione di Poisson e nella distribuzione di Gauss.

Un'altra importante legge in cui compare la costante **e** è la legge del decadimento radioattivo: $\boldsymbol{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$ (dove $\boldsymbol{N_0}$ è il numero dei nuclei all'istante t=0, $\boldsymbol{N(t)}$ è il numero dei nuclei non ancora decaduti al tempo t, $\lambda = \frac{1}{\tau}$, essendo τ la vita media dei nuclei.

Gli antichi greci sembra che usassero il valore di **e** come rapporto in alcune costruzioni architettoniche.

Per calcolare **"e"** con la precisione voluta si può ricorrere alla successione:

$$\boldsymbol{s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

e trovare n in modo che : $\boldsymbol{s_{n+1} - s_n < E}$, essendo E l'errore dato. Tale metodo risulta poco efficace, poiché la successione in questione converge molto lentamente.
Per calcolare in modo più rapido un valore approssimato di **e** si può ricorrere allo sviluppo in serie: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, ponendo x=1.

QUESITO 7

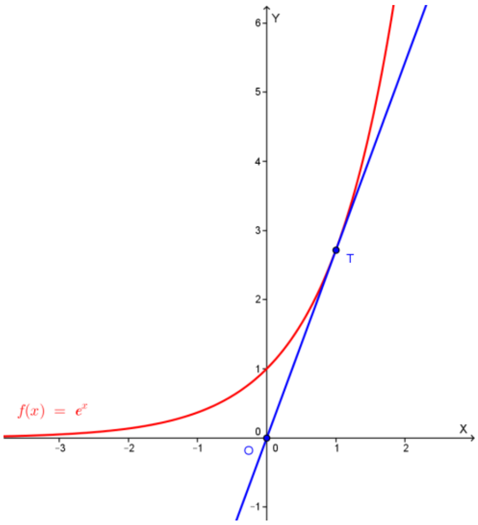
Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e tangente al grafico della funzione e^x .

La retta è del tipo y=mx e passa per il punto $T = (t; e^t)$, quindi: $e^t = mt$, da cui: $m = \frac{e^t}{t}$.

Posto $f(x) = e^t$, il coefficiente angolare della tangente in T è $f'(t) = e^t$, quindi:

$m = \frac{e^t}{t} = e^t, da\ cui: t = 1$. Pertanto risulta $m = e$.
La tangente richiesta ha equazione: $y = ex$, ed il punto di tangenza è $T = (1; e)$.

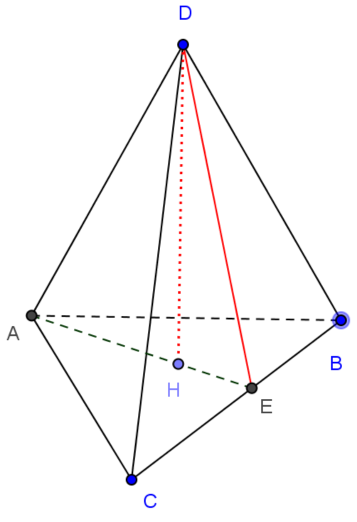
Questa la situazione grafica:



QUESITO 8

Calcolare il volume di in tetraedro regolare di spigolo s. Se è s=30 cm, quale è la capacità in litri del tetraedro?

Sia T il tetraedro regolare di spigolo s=30 cm.



Il volume del tetraedro è dato da: $V = \frac{1}{3} Area(base) \cdot h = \frac{1}{3} Area(ABC) \cdot DH$
ABC è un triangolo equilatero di lato $s = 30\ cm$, quindi la sua area è data da:

$$Area(ABC) = s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Per calcolare DH osserviamo che DE è l'altezza di un triangolo equilatero di lato s, quindi:

$$DE = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Notiamo poi che $AE = DE$ e che (essendo H il baricentro di ABC) $HE = \frac{1}{3} AE = \frac{1}{3}\left(s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Perciò: $HE = \frac{1}{6}\ s \cdot \sqrt{3}$. Quindi: $DH = \sqrt{DE^2 - HE^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{12}s^2} = \sqrt{\frac{8}{12}s^2} = s\frac{\sqrt{6}}{3}$

Il volume del tetraedro è dunque:

$$V = \frac{1}{3} Area(ABC) \cdot DH = \frac{1}{3}\left(s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot\ s\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}s^3 = V(T) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 30^3\ cm^3 \cong 3182\ cm^3$$

Risulta quindi $V(T) \cong 3182\ cm^3 \cong 3.182\ dm^3 \cong 3.182\ \ litri$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria