Scuole italiane all'estero (Calendario australe suppletiva) 2006

PROBLEMA 2

Sia $f\,(x) = x - x^3$ sull'intervallo [- 2, 2].

1)

Trovare m e n tali che la retta r d'equazione y=mx+n sia tangente al grafico di f nel punto (-1,0).

La retta deve passare per (-1; 0), quindi: -m+n=0, m=n. Deve poi essere:
$m = f'(-1)$; essendo $f'(x) = 1 - 3x^2$ si ha: $f'(-1) = -2 = m = n$. Quindi:

$r\colon\ y = -2x - 2.$

2)

Una seconda retta s passante per (-1,0) è tangente al grafico di f in un punto (a, b). Determinare a e b.

La retta s ha equazione del tipo: $y = k(x+1) = g(x)$ e deve essere:

$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$; $\begin{cases} a - a^3 = k(a+1) = b \\ 1 - 3a^2 = k \end{cases}$; $a - a^3 = (1 - 3a^2)(a+1)$; $2a^3 + 3a^2 - 1 = 0$

$2a^3 + 3a^2 - 1 = 0$ si abbassa di grado con $a = -1$, quindi, applicando la regola di Ruffini, si ha:

$2a^3 + 3a^2 - 1 = (a+1)(2a^2 + a - 1) = (a+1)(a+1)(2a-1) = 0\colon\ a = -1, a = \frac{1}{2}$.

Con $a = -1$ si ha b=0 e k=-2, quindi: $(a; b) = (-1; 0)$, la retta s coincide con r.
Con $a = \frac{1}{2}$ si ha b=3/8 e k=1/4, quindi: $(a; b) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; $s\colon\ y = \frac{1}{4}(x+1)$

3)

Dare una valutazione dell'angolo compreso tra le due rette r ed s.

Detto α il minore degli angoli formati da r ed s, si ha:

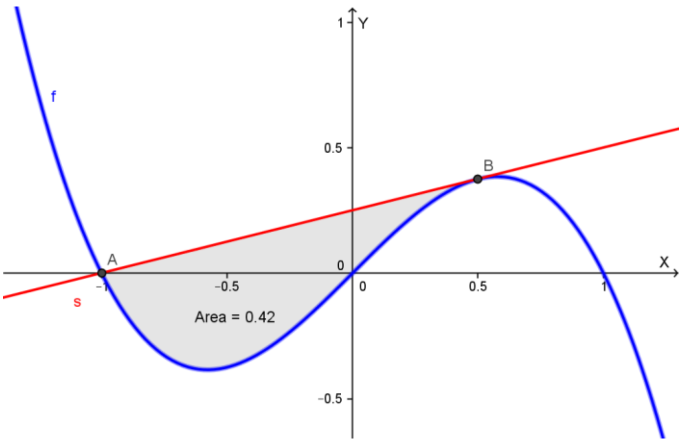
$$tg\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{2}}\right| = \frac{9}{2}\,, \qquad da\ cui:\ \alpha = arctg(4.5) \cong 77.5°$$

4)

Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dalla retta s.

Studiamo qualitativamente il grafico di $f\,(x) = x - x^3$.

Si tratta di una cubica simmetrica rispetto all'origine (che è quindi flesso), che interseca l'asse delle x in x=0, x=1 e x=-1. Per x che tende a +/- infinito la funzione tende a -/+ infinito. Il grafico qualitativo della funzione (per la richiesta fatta non serve determinare il massimo ed il minimo relativi) è il seguente:



L'area richiesta si ottiene con il seguente calcolo integrale:

$$\int_{-1}^{0.5}\left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - (x - x^3)\right]dx = \int_{-1}^{0.5}\left[x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right]dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{64} - \frac{3}{32} + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64} - \frac{3}{32} + \frac{1}{2} = \frac{1 - 6 + 32}{64} = \frac{27}{64}\,u^2 \cong 0.42\,u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria