Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2006 – Suppletiva

QUESITO 1

Si sa che $G(0) - F(0) = 3$, essendo $F(x)$ e $G(x)$ due primitive di $y = x^2$ e $y = x$ rispettivamente. Quanto vale $G(1) - F(1)$?

Risulta: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + a$ e $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + b$. Essendo $G(0) - F(0) = 3$ si ha: $b - a = 3$.
Quindi: $G(1) - F(1) = \frac{1}{2} + b - \frac{1}{3} - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 3 = \frac{19}{6} = G(1) - F(1)$.

QUESITO 2

Quanti sono i numeri di tre cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero?

Si tratta delle disposizioni semplici 4 oggetti (2,4,6,8) a 3 a 3:

$D_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$

QUESITO 3

La somma di due numeri è s; determinate i due numeri in modo che il loro prodotto sia massimo.

Questa proprietà può essere dimostrata in **modo elementare** a partire dalla seguente identità:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

da cui è facile capire che, se x+y è costante, il massimo di 4xy (quindi di xy), si ha quando $(x - y)^2 = 0$, cioè se x=y.

ALTRO MODO

$x + y = s \quad con \quad 0 \le x \le s$

$y = s - x \quad con \quad 0 \le y \le s$

$p = x \cdot y = x(s - x) = -x^2 + sx$

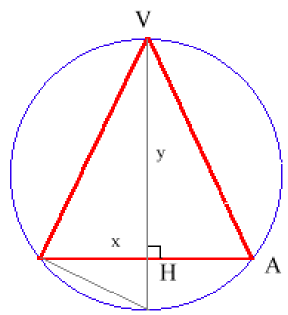
che rappresenta una parabola con la concavità verso il basso, il cui massimo si ha in corrispondenza del vertice:

$x = \frac{s}{2}$ (che soddisfa le condizioni della x), $y = s - x = s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}$ da cui x=y , quindi il prodotto è massimo quando i due numeri sono uguali.

N.B. Il problema potrebbe essere risolto anche **mediante le derivate** studiando il segno della derivata di p: $p' = -2x + s > 0 \quad se\ x < \frac{s}{2}$, quindi p è crescente se $x < \frac{s}{2}$ e decrescente se $x > \frac{s}{2}$, quindi in $x = \frac{s}{2}$ c'è il massimo assoluto di p.

QUESITO 4

Fra tutti i coni inscritti in una data sfera, trovare quello di volume massimo.



Indichiamo con y l'altezza del cono e con x il suo raggio di base. Per il secondo teorema di Euclide (detto R il raggio della sfera) si ha: $x^2 = y(2R - y)$. Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Tale volume è massimo se lo è $z = x^2 y = y^2(2R - y)$

Risoluzione elementare.

$y^2(2R - y) = (y)^2(2R - y)^1$: si tratta del prodotto di due potenze con somma delle basi costante (2R); tale prodotto è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{y}{2} = \frac{2R - y}{1}, \quad y = \frac{4}{3}R \ \ (altezza\ del\ cono\ uguale\ ai\ \frac{4}{3}\ del\ raggio\ della\ sfera)$$

Il cono di volume massimo inscritto in una sfera di dato raggio è quello la cui altezza è i 4/3 del raggio della sfera.

Risoluzione analitica.

Dobbiamo trovare il massimo della funzione $z = y^2(2R - y), \quad con\ 0 \leq y \leq 2R$
Risulta:

$$z' = 4Ry - 3y^2 \geq 0 \quad se \quad 3y^2 - 4Ry \leq 0: \ 0 \leq y \leq \frac{4}{3}R$$

La funzione è quindi crescente se $0 < y < \frac{4}{3}R$ e decrescente se $\frac{4}{3}R < y < 2R$.

Per $y = \frac{4}{3}R$ z (e quindi anche il volume del cono) assume il valore massimo.

QUESITO 5

Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ *è uguale a* 2^n *per ogni* $n \in N$.

Lo sviluppo della potenza del binomio è uguale a:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Ponendo a=b=1 si ha:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

QUESITO 6

Si consideri la funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ *e la tangente t al suo grafico nel punto di ascissa x=2. Quale è la pendenza di t?*

La pendenza di una retta è individuata dal coefficiente angolare, che nel nostro caso corrisponde ad $f'(2)$. Ma risulta: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, quindi: $f'(2) = 12 - 16 + 5 = 1$.
Detto α l'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle x, risulta:

$tg\alpha = 1, \quad \alpha = 45°$

QUESITO 7

E' data l'equazione $x^2 - 2(k - 1)x + 4 = 0$. *Dire per quali valori positivi del parametro k una o entrambe le radici sono reali.*

Le radico sono reali se $\frac{\Delta}{4} \geq 0, \quad (k-1)^2 - 4 \geq 0, \ k^2 - 2k - 3 \geq 0, \quad k \leq -1 \quad or \ \ k \geq 3.$

I valori positivi di k per cui una o entrambe le radici sono reali sono: $k \geq 3$.

QUESITO 8

La funzione $f(x) = asenx + bx$ *è tale che* $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sqrt{3}\frac{\pi}{6}$ *e presenta un massimo relativo nello stesso punto. Si trovino a e b e si dica se f(x) è periodica.*

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}a + \frac{b\pi}{6} = 1 - \sqrt{3}\frac{\pi}{6}\,, \quad 3a + b\pi = 6 - \sqrt{3}\pi$$

Si ha poi:

$$f'(x) = acosx + b\,, \quad f''(x) = -asenx$$

Essendo la funzione continua e derivabile quanto si vuole su tutto R, affinché $x = \frac{\pi}{6}$ sia punto di massimo relativo deve essere:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad e \quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0: \qquad a\frac{\sqrt{3}}{2} + b = 0 \quad e \quad -\frac{1}{2}a < 0$$

Deve quindi essere:

$$\begin{cases} 3a + b\pi = 6 - \sqrt{3}\pi \\ a\frac{\sqrt{3}}{2} + b = 0 \\ -\frac{1}{2}a < 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3a - a\frac{\sqrt{3}}{2}\pi = 6 - \sqrt{3}\pi \\ b = -a\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a > 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 6a - a\sqrt{3}\pi = 12 - 2\sqrt{3}\pi \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$\begin{cases} a = \frac{12-2\sqrt{3}\pi}{6-\sqrt{3}\pi} = 2 \\ b = -\sqrt{3} \\ a > 0 \end{cases}$: quindi i valori richiesti sono $a = 2 \quad e \quad b = -\sqrt{3}$

$f(x) = asenx + bx$ non è mai periodica se b è diverso da zero, quindi la nostra funzione non è periodica. Infatti, se b non è nullo, non esisterà mai un numero reale positivo T tale che $f(x) = f(x+T)\ per\ ogni\ x$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria