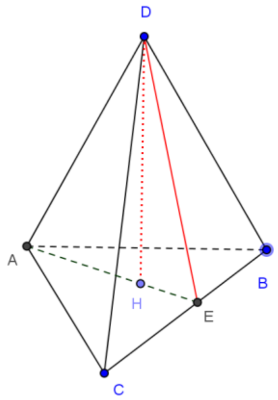
Scuole italiane all'estero (Europa) 2006 – PROBLEMA 2

Sia T il tetraedro regolare di lato 1.20 m.



1)

Si calcoli il volume, espresso come capacità in litri, di T.

Il volume del tetraedro è dato da: $V = \frac{1}{3} Area(base) \cdot h = \frac{1}{3} Area(ABC) \cdot DH$
ABC è un triangolo equilatero di lato $l = 1.20\ m$, quindi la sua area è data da:

$$Area(ABC) = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Per calcolare DH osserviamo che DE è l'altezza di un triangolo equilatero di lato l, quindi:

$$DE = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Notiamo poi che $AE = DE$ e che (essendo H il baricentro di ABC) $HE = \frac{1}{3} AE = \frac{1}{3}\left(l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Perciò: $HE = \frac{1}{6}\ l \cdot \sqrt{3}$. Quindi: $DH = \sqrt{DE^2 - HE^2} = \sqrt{\frac{3}{4} l^2 - \frac{1}{12} l^2} = \sqrt{\frac{8}{12} l^2} = l \frac{\sqrt{6}}{3}$

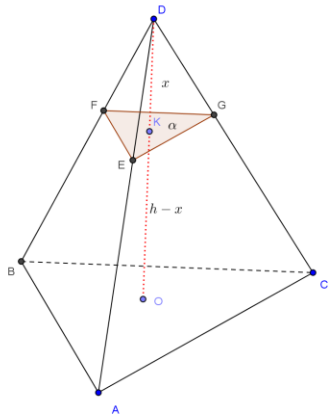
Il volume del tetraedro è dunque:

$$V = \frac{1}{3} Area(ABC) \cdot DH = \frac{1}{3}\left(l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot\ l \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3 = V(T) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 1.20^3 \cong 0.204\ \ m^3$$

Risulta quindi $V(T) \cong 0.204\ \ m^3 = 204\ dm^3 = 204\ litri$.

2)

Quanti piani paralleli alla base dividono T in due parti i cui volumi sono nel rapporto 2:3? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice di T?



Il piano divide T nella piramide EFGD e nel tronco di piramide ABCEFG. Indichiamo con x la distanza del piano sezione con T e con h l'altezza di T. Abbiamo:

$V(EFGD) = \frac{1}{3} Area(EFG) \cdot x$; ma, per una nota proprietà delle piramidi, risulta:

$\frac{Area(EFG)}{Area(ABC)} = \frac{x^2}{h^2}$, da cui: $Area(EFG) = \frac{x^2}{h^2} \cdot Area(ABC) = \frac{x^2}{\left(l\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} \cdot l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2}{\frac{2}{3}l^2} \cdot l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{8}\sqrt{3}\,x^2$

Pertanto:

$$V(EFGD) = \frac{1}{3} Area(EFG) \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{3}\,x^2 \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{8}\,x^3$$

Può essere: $\frac{V(EFGD)}{V(ABCEFG)} = \frac{2}{3}$, $\frac{V(EFGD)+V(ABCEFG)}{V(EFGD)} = \frac{2+3}{2}$, $\frac{V(T)}{V(EFGD)} = \frac{5}{2}$, $V(EFGD) = \frac{2}{5}\,V(T)$

E perciò:

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\,x^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 1.20^3 = \frac{36\sqrt{2}}{625}, \quad x^3 = \frac{36\sqrt{2}}{625} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{96\sqrt{6}}{625}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{96\sqrt{6}}{625}} \cong 0.722\ m$$

Oppure può essere:

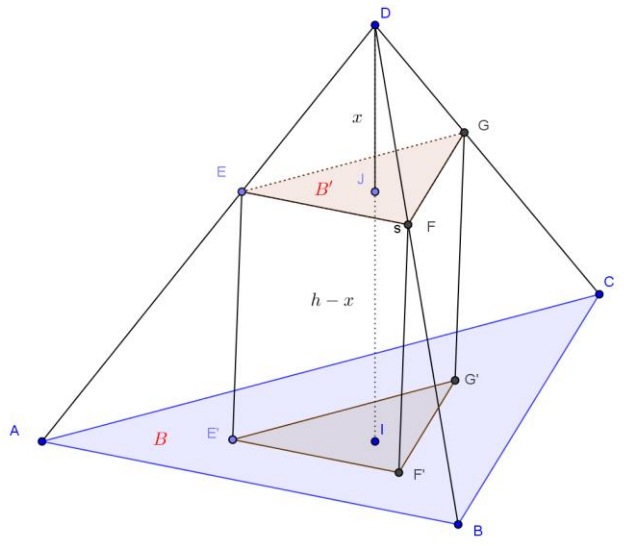
$\frac{V(ABCEFG)}{V(EFGD)} = \frac{2}{3}$, $\frac{V(T)}{V(EFGD)} = \frac{5}{3}$, $V(EFGD) = \frac{3}{5}\,V(T)$ e quindi:

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\,x^3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 1.20^3 = \frac{54\sqrt{2}}{625}, \quad x^3 = \frac{54\sqrt{2}}{625} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{144\sqrt{6}}{625}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{144\sqrt{6}}{625}} \cong 0.826\ m$$

Sono quindi due i piani richiesti.

3)

Come deve condursi un piano α parallelo alla base affinché il prisma le cui basi sono la sezione di T con α e la sua proiezione ortogonale sulla base di T, abbia volume massimo?



Indichiamo con h l'altezza della piramide e con x la distanza dal vertice del piano parallelo alla base. Per una proprietà delle piramidi, detta B' l'area della sezione, si ha:

$$B : B' = h^2 : x^2 \quad \Longrightarrow \quad B' = \frac{B \cdot x^2}{h^2}$$

Il prisma ha volume:

$$V(prisma) = A(base) \cdot altezza = B' \cdot (h - x) = \frac{B \cdot x^2}{h^2} \cdot (h - x)$$

Tale volume è massimo se lo è $y = x^2 \cdot (h - x)$.

Prima soluzione **per via elementare**:

$x^2 \cdot (h - x) = (x)^2 \cdot (h - x)^1$ è prodotto di due potenze le cui basi hanno somma costante (x e h-x), quindi è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti:

$$\frac{x}{2} = \frac{h - x}{1} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}h$$

Il prisma ha volume massimo se la piramide viene tagliata con un piano parallelo alla base ad una distanza dal vertice uguale ai 2/3 dell'altezza.

Soluzione per **con l'uso delle derivate**:

$y = x^2 \cdot (h - x) = f(x)\,, \quad h > 0,\ 0 \le x \le h$

Siccome la funzione è continua (e derivabile) in un intervallo chiuso e limitato, ammette massimo e minimo assoluto, agli estremi oppure in un punto che annulla la derivata prima.

$$f'(x) = 2x(h-x) - x^2 = -3x^2 + 2hx = 0 \; se \; x = 0, \quad oppure \quad x = \frac{2}{3}h$$

Risulta: $f(0) = f(h) = 0$, $f\left(\frac{2}{3}h\right) = \frac{4}{27}h^3$:   il massimo si ha per $x = \frac{2}{3}h$.
Allo stesso risultato si arriva se si studia il segno della derivata prima.

Con la collaborazione di Angela Santamaria