ORDINAMENTO 2006 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2} \quad ,$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a)

Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.

La curva può essere scritta nella forma: $x^2y - x + k = 0$ che rappresenta un fascio di curve algebriche del terzo ordine. Consideriamo due generatrici di tale fascio, ponendo, per esempio, k=1 e k=-1:

g_1: $x^2y - x + 1 = 0$, $\quad g_2$: $x^2y - x - 1 = 0$.

Queste due curve non hanno punti in comune, infatti il sistema:

$\begin{cases} x^2y - x + 1 = 0 \\ x^2y - x - 1 = 0 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} x^2y - x = -1 \\ x^2y - x = 1 \end{cases}$ è impossibile.

Le curve del fascio non hanno quindi punti in comune.

Notiamo che avremmo potuto ragionare anche senza ricorrere al concetto di fascio, considerando due curve generiche (una con $k = k_1$ l'altra con $k = k_2$) saremmo arrivati al sistema ancora impossibile:

$\begin{cases} x^2y - x = -k_1 \\ x^2y - x = -k_2 \end{cases}$ $\quad da\ cui \quad k_1 = k_2$ mentre, essendo le due curve diverse, è $k_1 \neq k_2$

Dimostriamo ora che ogni curva di equazione $y = \frac{x+k}{x^2}$, $con \quad k \neq 0$ presenta uno ed un solo flesso.

La funzione di equazione $y = \frac{x+k}{x^2}$ è definita e derivabile per ogni $x \neq 0$.
La calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$y' = \frac{x^2 - 2x(x+k)}{x^4} = \frac{-x-2k}{x^3}$$

$$y'' = \frac{-x^3 + (x+2k)(3x^2)}{x^6} = \frac{6k+2x}{x^4} \geq 0 \quad se \quad x \geq -3k$$

Con $k \neq 0$ la derivata seconda cambia segno a sinistra e a destra di $x = -3k$, quindi in tale punto abbiamo un (unico) flesso.

b)

Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione x+27y–9 =0.

Il coefficiente della tangente inflessionale è $m = -\frac{1}{27}$, quindi deve essere:

$$f'(-3k) = -\frac{1}{27} \quad da\ cui \quad \left(\frac{-x-2k}{x^3}\right)_{x=-3k} = \frac{k}{-27k^3} = -\frac{1}{27} \quad \Longrightarrow \frac{1}{k^2} = 1 \quad \Longrightarrow k = \pm 1$$

Il flesso ha ordinata $f(-3k) = \left(\frac{x+k}{x^2}\right)_{x=-3k} = -\frac{2k}{9k^2} = -\frac{2}{9k}$; poiché il flesso appartiene alla tangente inflessionale, sostituendo nell'equazione di tale retta le coordinate del flesso si ha:

$$-3k + 27\left(-\frac{2}{9k}\right) - 9 = 0 \quad \Longrightarrow -k - \frac{2}{k} - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k^2 + 3k + 2 = 0$$

che è soddisfatta da $k = -1$ ma non da $k = +1$: la curva richiesta è ha quindi equazione:

$$\gamma: \quad y = \frac{x-1}{x^2}$$

c)

Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto che t ha in comune con γ.

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

Dominio: $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

Essendo $f(-x) = \frac{-x-1}{x^2}$ diverso sia da $f(x)$ sia da $-f(x)$ la funzione non né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, la funzione non esiste
Se $y = 0, \quad x = 1$

Segno della funzione:

$$y > 0 \quad se \quad \frac{x-1}{x^2} > 0 \quad da\ cui \qquad x > 1$$

Limiti:

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0^{\mp} \quad : \qquad y = 0 \quad asintoto\ orizzontale$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\infty \ : \qquad x = 0 \quad asintoto\ verticale$$

Non ci sono asintoti obliqui (essendoci quelli orizzontali sia al $-\infty$ che al $+\infty$.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2-x}{x^3} \geq 0 \quad se \quad 0 < x \leq 2$$
La funzione è crescente se $0 < x < 2$ e decrescente se $x < 0 \quad e \quad x > 2$

In $x = 2$ abbiamo un massimo relativo (e assoluto) di ordinata: ¼ .

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2(x-3)}{x^4} \geq 0 \quad se \quad x \geq 3\ .$$

Pertanto il grafico volge la concavità verso l'alto se $x > 3$ e verso il basso se $x < 3$.

$x = 3$ è punto di flesso con ordinata: $y = \frac{2}{9}$: $F = \left(3; \frac{2}{9}\right)$. Grafico:

Consideriamo il punto A di ascissa 1: $A = (1; 0)$. Cerchiamo l'equazione della tangente t in A:

$m = f'(1) = 1$, quindi: $t\!: \ y - 0 = 1(x-1) \quad da\ cui \quad y = x - 1.$

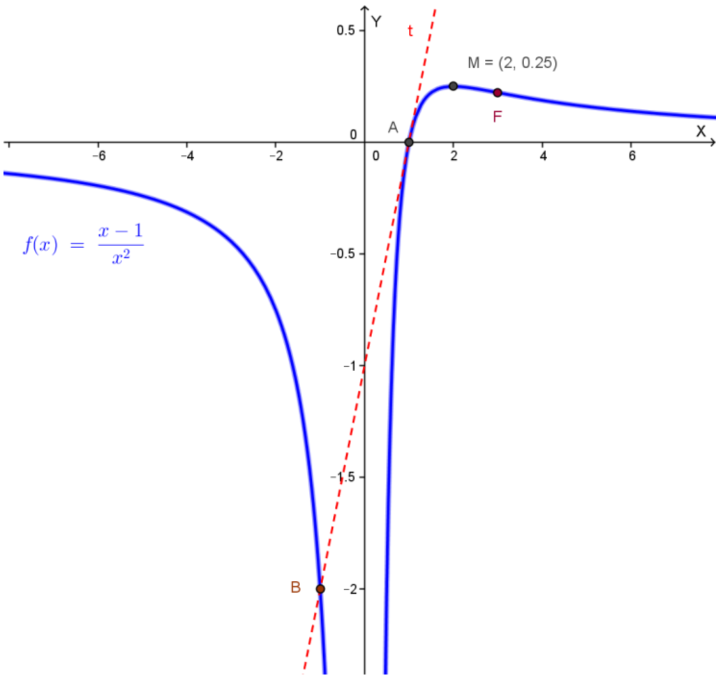
Cerchiamo ora l'ulteriore intersezione di t con la curva:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \dfrac{x-1}{x^2} \end{cases} \Longrightarrow \ x - 1 = \frac{x-1}{x^2} \qquad \Longrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow x^2\,(x-1) - (x-1) = 0$$

$(x-1)(x^2-1)=0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)^2(x+1)=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-1 \quad (oltre\ a\ x=1)$

Quindi l'ulteriore intersezione della tangente in A con la curva è il punto $B=(-1;-2)$

Il grafico della funzione è il seguente:



d)

Determinare l'equazione della circonferenza c, tangente alla curva γ nel punto A ed avente il centro sull'asse y.

La circonferenza sarà tangente in A alla retta t quindi il centro appartiene alla perpendicolare n a t in A; il coefficiente angolare di tale retta è quindi -1.

$n: \quad y-0=-1(x-1) \quad \Longrightarrow \quad y=-x+1$

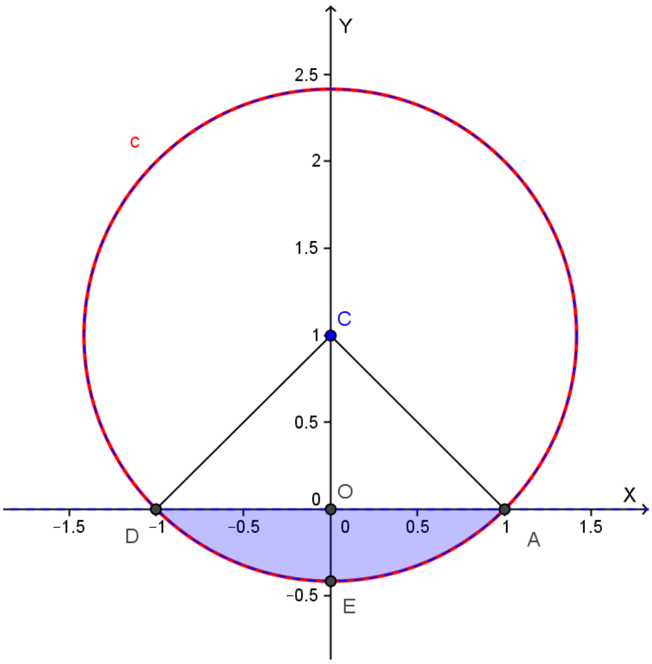
Siccome il centro appartiene anche all'asse y, le sue coordinate si ottengono ponendo x=0 nella retta n: $C=(0;1)$. Il raggio della circonferenza è dato dalla distanza CA:

$R^2=CA^2=2$. L'equazione della circonferenza è quindi:

$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2+(y-1)^2=2 \quad \Longrightarrow \quad c: \quad x^2+y^2-2y-1=0$

e)

Calcolare l'area della minore delle regioni in cui l'asse x divide il cerchio delimitato da c.



La regione richiesta è il segmento circolare delimitato dalla corda AD e dall'arco AED
L'area di tale segmento circolare si ottiene sottraendo all'area del settore circolare ACDE l'area del triangolo ACD.
Il triangolo ACD è rettangolo in C, poiché i triangoli AOC e COD sono rettangoli isosceli con ipotenuse rispettivamente AC e CD. Quindi:

$$Area(triangolo\ ACD) = \frac{AC \cdot CD}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1$$

Il settore circolare che ci interessa è la quarta parte del cerchio (poiché la sua ampiezza è 90°), quindi:

$$Area(settore\ circ.\ ACDE) = \frac{1}{4}\ \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$$

Pertanto:

$$Area(segmento\ circolare\ ADE) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\ u^2 \cong 0.57\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri