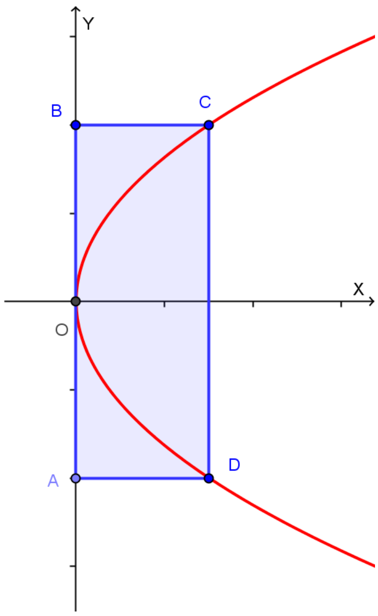
PNI 2006 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Si considerino il rettangolo ABCD e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V". Determinare il rapporto V'/V".



Indicata con $x = ay^2$ l'equazione della parabola, risulta:

$$V' = \pi \cdot OB^2 \cdot BC = \pi \cdot y_c^2 \cdot x_c = \pi \cdot \frac{x_c}{a} \cdot x_c = \frac{\pi}{a} \cdot x_c^2$$

$$V'' = \pi \int_0^{x_c} y^2 dx = \pi \int_0^{x_c} y^2 dx = \pi \int_0^{x_c} \frac{x}{a} dx = \frac{\pi}{a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_c} = \frac{\pi}{2a} [x_c^2] = \frac{\pi}{2a} \cdot x_c^2$$

Quindi:

$$\frac{V'}{V''} = \frac{\frac{\pi}{a} \cdot x_c^2}{\frac{\pi}{2a} \cdot x_c^2} = 2$$

QUESITO 2

Il numero delle soluzioni dell'equazione $sen2x \cos x = 2$ *nell'intervallo reale* $[0, 2\pi]$ *è:*

[A] 0; [B] 2; [C] 3; [D] 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

Primo modo: il prodotto di due numeri minori o uguali ad 1 (sen(2x) e cos(x)) non può essere uguale a 2. Quindi la risposta esatta è la [A].

Secondo modo:

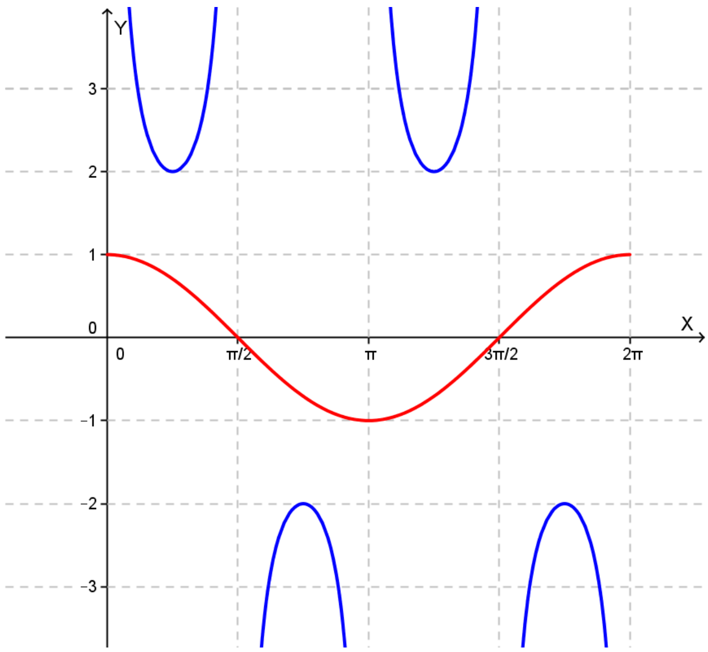
L'equazione può essere vista nella forma:

$$cosx = \frac{2}{sen(2x)} = 2cosec(2x)$$

Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento le due funzioni:

$y = \cos(x)$ $\quad$ e $\quad$ $y = 2\, cosec(2x)$

Notiamo che il grafico di $y = 2\, cosec(2x)$ si ottiene facilmente dal grafico di $y = \; cosec(x)$ con una contrazione orizzontale di fattore 2 ed una dilatazione verticale di fattore 2.



Analizzando i grafici si deduce che l'equazione non ammette alcuna soluzione.

La risposta corretta è la [A].

QUESITO 3

Il limite della funzione $f(x) = x\ sen\frac{1}{x}$ *, per* $x \to 0$ **:**

[A] non esiste; [B] è $+\infty$*; [C] è 0; [D] è un valore finito diverso da 0*

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

La funzione $y = sen\frac{1}{x}$ non ammette limite per $x \to 0$, ma è limitata tra -1 e 1. Il limite si può calcolare utilizzando il teorema del confronto; infatti:

$$-x \leq x\ sen\frac{1}{x} \leq x$$

e siccome le funzioni estreme tendono a 0, anche la nostra funzione tende a 0:
la risposta esatta è quindi la [C].

QUESITO 4

Dimostrare che la funzione $f(x) = x^a$*, dove a è un qualsiasi numero reale non nullo, è derivabile in ogni punto del suo dominio.*

Il dominio della funzione è x>0.
Risulta:

$$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$$

Questa funzione, se x>0, è sempre definita, quindi è dimostrato che la funzione data è derivabile per ogni x del suo dominio.

QUESITO 5

Il seguente teorema esprime la condizione d'integrabilità di Mengoli-Cauchy:
"Se una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo chiuso e limitato [a,b], è ivi continua, allora ivi è anche integrabile".
Enunciare la proposizione inversa e spiegare in maniera esauriente perché tale proposizione non è un teorema.

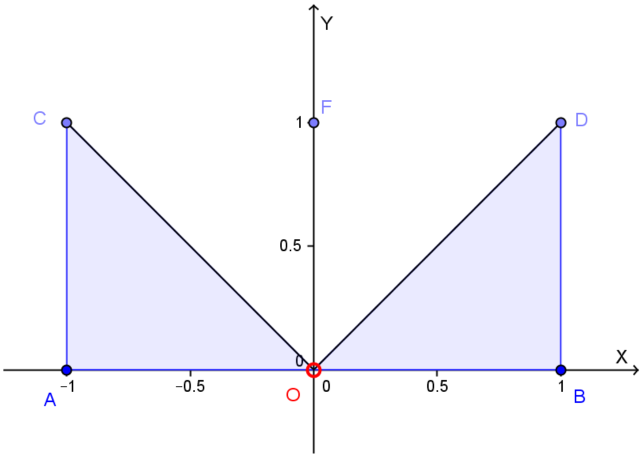
La proposizione inversa è la seguente:

"Se una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo chiuso e limitato [a,b], è ivi integrabile, allora ivi è anche continua".

Tale proposizione non è un teorema. Forniamo a tal proposito un controesempio, cioè una funzione integrabile secondo Mengoli-Cauchy, ma non continua.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & se \ -1 \le x \le 1 \ e \ x \ne 0 \\ 1 & se \ x = 0 \end{cases}$$

La funzione, definita in un intervallo chiuso e limitato non è continua in x=0, eppure è integrabile.
Rappresentiamo graficamente la funzione:



Risulta:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (-x)dx + \int_{0}^{1} (x)dx = \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} (-x)dx + \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{1} (+x)dx =$$

$$= \lim_{b\to 0^-} \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{b} + \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{a}^{1} = \lim_{b\to 0^-} \left[-\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}\right] + \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Quindi la funzione è integrabile senza essere continua.

QUESITO 6

Dire se è corretto o no, affermare che si ha:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + c$$

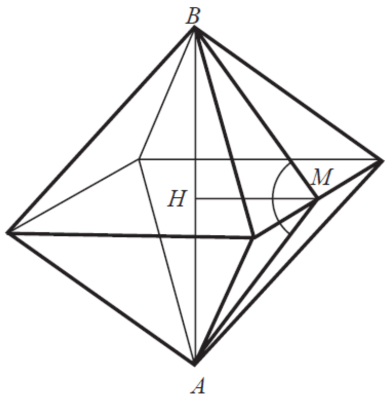
dove c è una costante arbitraria e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

L'affermazione è falsa.

Infatti risulta: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$, poiché la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è definita per ogni $x \ne 0$.

QUESITO 7

Calcolare l'ampiezza dell'angolo formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".



L'angolo richiesto è AMB, che è il doppio dell'angolo HMB. Detto l lo spigolo del tetraedro risulta:

$$HM = \frac{l}{2} \qquad e \qquad BM = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

Quindi, posto $\alpha = BMH$

$$cos(\alpha) = \frac{HM}{BM} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cong 54.736° \quad quindi: \quad 2\alpha \cong 109.472°$$

$$109.472° = 109° + (0.472 \cdot 60)' = 109° + (28.32)' = 109°28'$$

L'angolo diedro dell'ottaedro regolare ha quindi ampiezza uguale a $2\ arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, che è pari a circa $109°28'$.

QUESITO 8

Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

Una similitudine può essere vista come la composizione di una isometria con una omotetia; l'isometria trasforma ovviamente una parabola in una parabola congruente. E' quindi sufficiente dimostrare che un'omotetia trasforma una parabola in una parabola.

Le equazioni generali dell'omotetia possono essere scritte nella forma:

$$\begin{cases} X = kx + p \\ Y = ky + q \end{cases} \qquad con\ k\ numero\ reale\ non\ nullo\ e\ a\ e\ b\ numeri\ reali\ qualsiasi$$

L’omotetia inversa ha equazioni:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{k}X - \dfrac{p}{k} \\ y = \dfrac{1}{k}Y - \dfrac{q}{k} \end{cases}$$

Possiamo limitarci a considerare una parabola del tipo $y = ax^2$, senza ledere la generalità della questione, poiché a questa forma può essere ricondotta mediante isometrie una qualsiasi altra parabola.

Cerchiamo quindi la trasformata di $y = ax^2$:

$$\frac{1}{k}Y - \frac{q}{k} = a\left(\frac{1}{k}X - \frac{p}{k}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{k}Y = \frac{q}{k} + \frac{a}{k^2}X^2 - \frac{2ap}{k^2}X + \frac{ap^2}{k^2}$$

Ed infine, moltiplicando tutto per k e ordinando:

$$Y = \frac{a}{k}X^2 - \frac{2ap}{k}X + q + \frac{ap^2}{k}$$

che rappresenta ancora una parabola.

QUESITO 9

Un’urna contiene 150 palline, che possono essere di vetro o di plastica, bianche o nere. Per la precisione: 62 palline sono bianche, 38 sono di vetro nero e 40 sono di plastica bianca.
Calcolare la probabilità che, estratta a caso una pallina, NON sia di plastica nera.

150 palline
62 bianche: quindi 150-62=88 nere
38 nere sono di vetro, quindi 88-38=50 sono di vetro bianco
Siccome le bianche sono 62 e le bianche di plastica 40, avremo 62-40=22 di vetro bianco

In conclusione l’urna ha questa composizione:

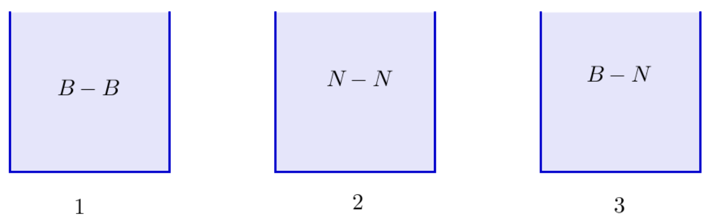
bianche di plastica=40 ; bianche di vetro=22 ; nere di plastica=50 ; nere di vetro=38

Siccome le palline NON di plastica nera 150-nere di plastica(50)=100, la probabilità che la pallina estratta NON sia di plastica nera è:

$$p(NON\ plastica\ nera) = \frac{paline\ NON\ di\ plastica\ nera}{totale\ paline} = \frac{100}{150} = \frac{2}{3} \cong 67\%$$

QUESITO 10

In ciascuna di tre buste uguali vi sono due cartoncini: in una busta essi sono bianchi, in un'altra sono neri, nella terza sono uno bianco e l'altro nero. Si estrae a caso una busta e, da essa, un cartoncino. Qual è la probabilità che il cartoncino rimasto in questa busta sia dello stesso colore di quello estratto?



Dopo aver estratto il cartoncino, i casi favorevoli sono 2 (la busta 1 e la busta 2) su 3 casi possibili; quindi la probabilità è:

$$p = \frac{2}{3}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri