ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Corso sperimentale

Sessione straordinaria 2006 – Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

È dato il triangolo ABC in cui:

$$\overline{AB} = \frac{25}{2}, \quad \overline{AC} = 5\sqrt{5}, \quad \operatorname{tg}\hat{A} = 2.$$

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato AB e tracciare la circonferenza k avente centro in C e tangente al lato AB.
Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta AB:

a) scrivere l'equazione della circonferenza k;
b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento BC;
c) determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A;
d) calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC;
e) trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k ed alla parabola p.

PROBLEMA 2.

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici rispetto all'origine O ed hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2, \frac{64}{15}\right)$.

a) Trovare l'equazione y=f(x) dei grafici suddetti.
b) Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.
c) Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.
d) Indicato con P(x) il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v (u<v) le ascisse dei punti, distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x)\,dx.$$

e) Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca γ.

QUESTIONARIO

1. È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (*Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti*).

2. Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.

3. Se le funzioni f(x) e g(x), entrambe tendenti a 0, quando $x \to a$, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando $x \to a$. È vero o è falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

4. Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \to +\infty$:

[A] è 0; [B] è un valore finito diverso da 0; [C] è $+\infty$; [D] è $-\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

5. Il limite della funzione $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, per $x \to 0$, è uguale ad 1. Si chiede di calcolarlo senza ricorrere alla regola di De L'Hôpital.

6. Si ricorda la seguente definizione: «Considerata una funzione reale di variabile reale f(x), definita in un intervallo I, ogni funzione F(x), derivabile in I e tale che F'(x)=f(x), si dice primitiva di f(x) in I». Stabilire se la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 1 \le x \le 2 \\ 2 \text{ se } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

ammette primitiva nell'intervallo [1,3].

7. Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione:

$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$

ammette una ed una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[z, z+1]$ al quale appartiene tale soluzione, essendo z un numero intero.

8. Descrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato, a meno di 10^{-3}, della soluzione reale della precedente equazione.

9. Si considerino le seguenti equazioni:

$$x' = a\,x - (a-1)\,y + 1, \quad y' = 2\,a\,x + (a-1)\,y + 2,$$

dove a è un parametro reale.

Determinare i valori di a per cui le equazioni rappresentano: 1) un'affinità, 2) un'affinità equivalente (si ricorda che un'affinità si dice *equivalente* se conserva le aree).

10. Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine ci sono due "Maria" e fra i maschi un solo "Antonio". Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quanto vale la probabilità che la delegazione comprenda "Antonio" e almeno una "Maria"?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

Riguarda:

- **indirizzo Scientifico, Corso sperimentale PNI, materia Matematica**
- **indirizzo Opzione scientifica tecnologica, Internazionale europeo, materia Matematica Informatica**