ORDINAMENTO 2006 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici rispetto all'origine O e hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2;\frac{64}{15}\right)$.

a)

Trovare l'equazione $y = f(x)$ *dei grafici suddetti.*

La generica funzione polinomiale di 5° grado ha equazione:

$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

Affinché il grafico di tale funzione sia simmetrico rispetto all'origine O (funzione dispari, cioè $y(-x) = -y(x)$) devono mancare i termini di grado pari, compreso il termine noto, quindi la funzione è del tipo:

$y = ax^5 + cx^3 + ex$

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$y' = 5ax^4 + 3cx^2 + e\,, \qquad y'' = 20ax^3 + 6cx$

Per avere un massimo relativo in $\left(-2;\frac{64}{15}\right)$ basta che sia:

$$\begin{cases} y(-2) = \dfrac{64}{15} \\ y'(-2) = 0 \\ y''(-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -32a - 8c - 2e = \dfrac{64}{15} \\ 80a + 12c + e = 0 \\ -160a - 12c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a + 4c + e = -\dfrac{32}{15} \\ 80a + 12c + e = 0 \\ c > -\dfrac{40}{3}a \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la seconda e la terza equazione abbiamo:

$64a + 8c = +\frac{32}{15}$, $\quad c = -8a + \frac{4}{15}$ e sostituendo nella seconda equazione:

$e = -80a - 12c = -80a - 12\left(-8a + \dfrac{4}{15}\right) = 16a - \dfrac{16}{5}$

La funzione ha quindi equazione:

$y = ax^5 - \left(8a - \frac{4}{15}\right)x^3 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)x$,

con $c > -\frac{40}{3}a$, *cioè* $-8a + \frac{4}{15} > -\frac{40}{3}a$, $a > -\frac{1}{20}$ (e $a \neq 0$)

b)

Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.

Le curve di equazione $y = ax^5 - \left(8a - \frac{4}{15}\right)x^3 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)x$ dipendono linearmente da un parametro, quindi costituiscono un fascio. Mettiamo in evidenza due generatrici di tale fascio:

$$y = ax^5 - 8ax^3 + \frac{4}{15}x^3 + 16ax - \frac{16}{5}x \quad , \quad y - \frac{4}{15}x^3 + \frac{16}{5}x + a(x^5 - 8x^3 + 16x)$$

Per trovare i punti comuni mettiamo a sistema le equazioni delle due generatrici:

$$\begin{cases} y - \frac{4}{15}x^3 + \frac{16}{5}x = 0 \\ x^5 - 8x^3 + 16x = 0 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$x^5 - 8x^3 + 16x = 0 \ , \ \ x(x^4 - 8x^2 + 16) = 0 \, , \qquad x(x^2 - 4)^2 = 0,$$

$$x(x-2)^2(x+2)^2 = 0 \text{:} \ \ x = 0, x = 2 \ (doppia), x = -2 \ (doppia)$$

Sostituendo questi valori nella prima equazione otteniamo i tre punti base (punti comuni a tutte le curve del fascio):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{64}{15} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{64}{15} \end{cases}$$

Gli ultimi due punti sono doppi, quindi le curve del fascio hanno in essi la stessa tangente.

c)

Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.

Osserviamo che nel punto di flesso con tangente inflessionale l'asse x si deve annullare la derivata prima (il coefficiente angolare della retta y=0 è 0) e la derivata seconda. Risulta:

$y = ax^5 - \left(8a - \frac{4}{15}\right)x^3 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)x$

$y' = 5ax^4 - 3\left(8a - \frac{4}{15}\right)x^2 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)$, $y'' = 20ax^3 - 6\left(8a - \frac{4}{15}\right)x = 0$ se x=0 ed in x=0 si annulla anche la derivata prima se:

$16a - \frac{16}{5} = 0$, $a = \frac{1}{5}$

La curva richiesta ha quindi equazione:

γ: $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$

Studiamo la funzione.

La funzione è definita su tutto l'asse reale, passa per l'origine (punto di flesso con tangente l'asse x), taglia l'asse x negli ulteriori punti le cui ascisse si ottengono risolvendo l'equazione:

$\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 = 0$, $\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3} = 0, x^2 = \frac{20}{3}$, $x = \pm\sqrt{\frac{20}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{15}}{3}$

I limiti sono meno infinito per x che tende a meno infinito e più infinito per x che tende a più infinito.

Massimi e minimi:

$y' = x^4 - 4x^2 \geq 0$ se $x^2(x^2-4) \geq 0$ $verificata\ se\ x = 0\ e\ se$ $x \leq -2\ e\ x \geq 2$

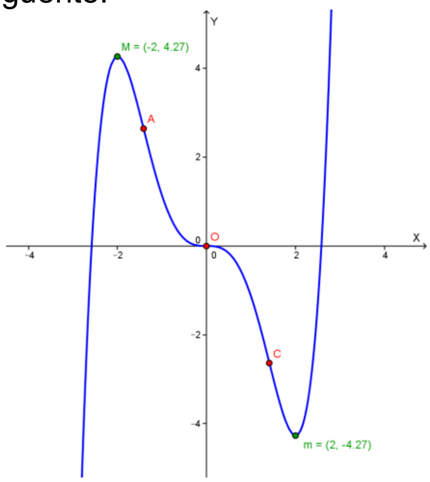
Il grafico è crescente se x<-2 vel x>2, ha un flesso a tangente orizzontale in x=0, massimo relativo se x=-2 (con y=64/15) ed un minimo relativo se x=2 (con y=-64/15).

Flessi:

$y'' = 4x^3 - 8x \geq 0\ se$ $x(x^2-2) \geq 0$ se $-\sqrt{2} \leq x \leq 0\,, x \geq \sqrt{2}$

Il grafico volge quindi la concavità verso l'alto se $-\sqrt{2} < x < 0$ e $x > \sqrt{2}$ e verso il basso se $x < -\sqrt{2}$ e $0 < x < \sqrt{2}$. Abbiamo dei flessi per x=0 (y=0), per $x = -\sqrt{2}$ (con $y = \frac{28}{15}\sqrt{2}$) e per $x = \sqrt{2}$ (con $y = -\frac{28}{15}\sqrt{2}$).

Il grafico della funzione è il seguente:



d)

Indicato con P(x) il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v (u<v) le ascisse dei punti, distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x)dx.$$

Risulta: $u = -\sqrt{\frac{20}{3}}$ e $v = \sqrt{\frac{20}{3}}$

Essendo v= - u e la curva simmetrica rispetto all'origine degli assi l'integrale richiesto vale zero:

$$\int_u^v P(x)dx = 0\,.$$

e)

Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca γ.

I tre flessi, come già visto nel punto c, hanno coordinate:

$$A = \left(-\sqrt{2};\, \frac{28}{15}\sqrt{2}\right), \qquad O = (0;0), \qquad C = \left(\sqrt{2};\, -\frac{28}{15}\sqrt{2}\right)$$

Ricordiamo che la condizione di allineamento di tre punti è:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

Risulta:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \quad , \quad \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{-\frac{28}{15}\sqrt{2} - \frac{28}{15}\sqrt{2}}{-\frac{28}{15}\sqrt{2}} = 2$$

I tre flessi sono quindi allineati.

Per trovare le intersezioni le intersezioni della retta dei flessi con la curva scriviamo l'equazione della retta OC, retta per l'origine con coefficiente angolare:

$m = \frac{y_C}{x_C} = \frac{-\frac{28}{15}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{28}{15}$; quindi la retta dei flessi ha equazione: $y = -\frac{28}{15}x$

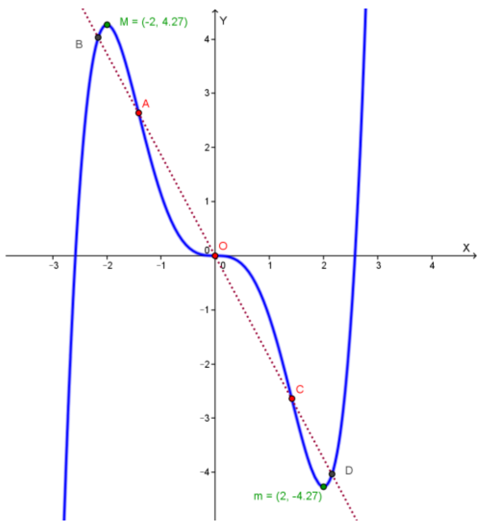
Intersechiamo la retta dei flessi con la curva:

$$\begin{cases} y = -\frac{28}{15}x \\ y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 \end{cases} \quad , \quad \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 = -\frac{28}{15}x \quad , \quad 3x^5 - 20x^3 + 28x = 0$$

$x(3x^4 - 20x^2 + 28) = 0$, che come soluzioni x=0 e le radici dell'equazione:

$$3x^4 - 20x^2 + 28 = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{42}}{3}$$

Quindi la retta dei flessi interseca ulteriormente la curva nei punti di ascissa $x = \pm\frac{\sqrt{42}}{3}$.



Con la collaborazione di Angela Santamaria