

PNI 2006 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile x , con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici rispetto all'origine O e hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2; \frac{64}{15}\right)$.

a)

Trovare l'equazione $y = f(x)$ dei grafici suddetti.

La generica funzione polinomiale di 5° grado ha equazione:

$$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

Affinché il grafico di tale funzione sia simmetrico rispetto all'origine O (funzione dispari, cioè $y(-x) = -y(x)$) devono mancare i termini di grado pari, compreso il termine noto, quindi la funzione è del tipo:

$$y = ax^5 + cx^3 + ex$$

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$y' = 5ax^4 + 3cx^2 + e, \quad y'' = 20ax^3 + 6cx$$

Per avere un massimo relativo in $\left(-2; \frac{64}{15}\right)$ basta che sia:

$$\begin{cases} y(-2) = \frac{64}{15} \\ y'(-2) = 0 \\ y''(-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -32a - 8c - 2e = \frac{64}{15} \\ 80a + 12c + e = 0 \\ -160a - 12c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a + 4c + e = -\frac{32}{15} \\ 80a + 12c + e = 0 \\ c > -\frac{40}{3}a \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la seconda e la terza equazione abbiamo:

$$64a + 8c = +\frac{32}{15}, \quad c = -8a + \frac{4}{15} \text{ e sostituendo nella seconda equazione:}$$

$$e = -80a - 12c = -80a - 12\left(-8a + \frac{4}{15}\right) = 16a - \frac{16}{5}$$

La funzione ha quindi equazione:

$$y = ax^5 - \left(8a - \frac{4}{15}\right)x^3 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)x,$$

$$\text{con } c > -\frac{40}{3}a, \text{ cioè } -8a + \frac{4}{15} > -\frac{40}{3}a, \quad a > -\frac{1}{20} \text{ (e } a \neq 0)$$

b)

Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.

Le curve di equazione $y = ax^5 - \left(8a - \frac{4}{15}\right)x^3 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)x$ dipendono linearmente da un parametro, quindi costituiscono un fascio. Mettiamo in evidenza due generatrici di tale fascio:

$$y = ax^5 - 8ax^3 + \frac{4}{15}x^3 + 16ax - \frac{16}{5}x, \quad y = \frac{4}{15}x^3 + \frac{16}{5}x + a(x^5 - 8x^3 + 16x)$$

Per trovare i punti comuni mettiamo a sistema le equazioni delle due generatrici:

$$\begin{cases} y - \frac{4}{15}x^3 + \frac{16}{5}x = 0 \\ x^5 - 8x^3 + 16x = 0 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$x^5 - 8x^3 + 16x = 0, \quad x(x^4 - 8x^2 + 16) = 0, \quad x(x^2 - 4)^2 = 0,$$

$$x(x - 2)^2(x + 2)^2 = 0: \quad x = 0, x = 2 \text{ (doppia)}, x = -2 \text{ (doppia)}$$

Sostituendo questi valori nella prima equazione otteniamo i tre punti base (punti comuni a tutte le curve del fascio):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{64}{15} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{64}{15} \end{cases}$$

Gli ultimi due punti sono doppi, quindi le curve del fascio hanno in essi la stessa tangente.

c)

Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.

Osserviamo che nel punto di flesso con tangente inflessionale l'asse x si deve annullare la derivata prima (il coefficiente angolare della retta $y=0$ è 0) e la derivata seconda.

Risulta:

$$y = ax^5 - \left(8a - \frac{4}{15}\right)x^3 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)x$$

$$y' = 5ax^4 - 3\left(8a - \frac{4}{15}\right)x^2 + \left(16a - \frac{16}{5}\right), \quad y'' = 20ax^3 - 6\left(8a - \frac{4}{15}\right)x = 0 \text{ se } x=0 \text{ ed in } x=0 \text{ si annulla anche la derivata prima se:}$$

$$16a - \frac{16}{5} = 0, \quad a = \frac{1}{5}$$

La curva richiesta ha quindi equazione:

$$\gamma: y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$$

Studiamo la funzione.

La funzione è definita su tutto l'asse reale, passa per l'origine (punto di flesso con tangente l'asse x), taglia l'asse x negli ulteriori punti le cui ascisse si ottengono risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 = 0, \quad \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3} = 0, \quad x^2 = \frac{20}{3}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{20}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

I limiti sono meno infinito per x che tende a meno infinito e più infinito per x che tende a più infinito.

Massimi e minimi:

$$y' = x^4 - 4x^2 \geq 0 \text{ se } x^2(x^2 - 4) \geq 0 \text{ verificata se } x = 0 \text{ e se } x \leq -2 \text{ e } x \geq 2$$

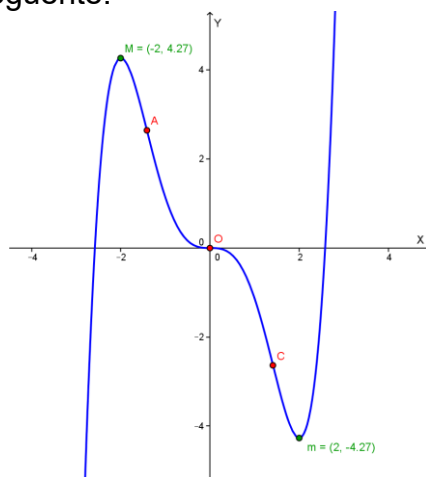
Il grafico è crescente se $x < -2$ vel $x > 2$, ha un flesso a tangente orizzontale in $x=0$, massimo relativo se $x=-2$ (con $y=64/15$) ed un minimo relativo se $x=2$ (con $y=-64/15$).

Flessi:

$$y'' = 4x^3 - 8x \geq 0 \text{ se } x(x^2 - 2) \geq 0 \text{ se } -\sqrt{2} \leq x \leq 0, x \geq \sqrt{2}$$

Il grafico volge quindi la concavità verso l'alto se $-\sqrt{2} < x < 0$ e $x > \sqrt{2}$ e verso il basso se $x < -\sqrt{2}$ e $0 < x < \sqrt{2}$. Abbiamo dei flessi per $x=0$ ($y=0$), per $x = -\sqrt{2}$ (con $y = \frac{28}{15}\sqrt{2}$) e per $x = \sqrt{2}$ (con $y = -\frac{28}{15}\sqrt{2}$).

Il grafico della funzione è il seguente:



d)

Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v ($u < v$) le ascisse dei punti, distinti da O , in cui γ interseca l'asse x , calcolare:

$$\int_u^v P(x) dx.$$

Risulta: $u = -\sqrt{\frac{20}{3}}$ e $v = \sqrt{\frac{20}{3}}$

Essendo $v = -u$ e la curva simmetrica rispetto all'origine degli assi l'integrale richiesto vale zero:

$$\int_u^v P(x) dx = 0.$$

e)

Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca γ .

I tre flessi, come già visto nel punto c, hanno coordinate:

$$A = \left(-\sqrt{2}; \frac{28}{15}\sqrt{2}\right), \quad O = (0; 0), \quad C = \left(\sqrt{2}; -\frac{28}{15}\sqrt{2}\right)$$

Ricordiamo che la condizione di allineamento di tre punti è:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

Risulta:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2, \quad \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{-\frac{28}{15}\sqrt{2} - \frac{28}{15}\sqrt{2}}{-\frac{28}{15}\sqrt{2}} = 2$$

I tre flessi sono quindi allineati.

Per trovare le intersezioni della retta dei flessi con la curva scriviamo l'equazione della retta OC, retta per l'origine con coefficiente angolare:

$$m = \frac{y_C}{x_C} = \frac{-\frac{28}{15}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{28}{15}; \quad \text{quindi la retta dei flessi ha equazione: } y = -\frac{28}{15}x$$

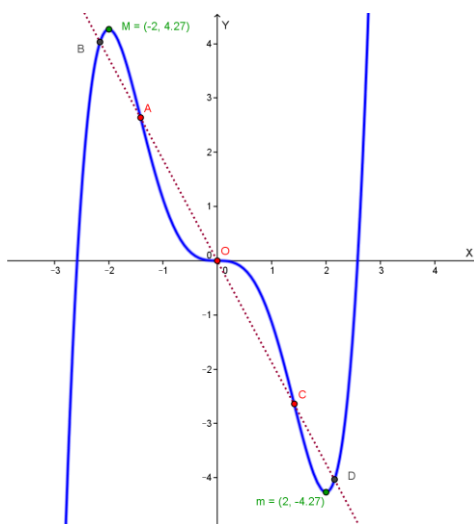
Intersechiamo la retta dei flessi con la curva:

$$\begin{cases} y = -\frac{28}{15}x \\ y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 \end{cases}, \quad \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 = -\frac{28}{15}x, \quad 3x^5 - 20x^3 + 28x = 0$$

$x(3x^4 - 20x^2 + 28) = 0$, che come soluzioni $x=0$ e le radici dell'equazione:

$$3x^4 - 20x^2 + 28 = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm \frac{\sqrt{42}}{3}$$

Quindi la retta dei flessi interseca ulteriormente la curva nei punti di ascissa $x = \pm \frac{\sqrt{42}}{3}$.



Con la collaborazione di Angela Santamaria