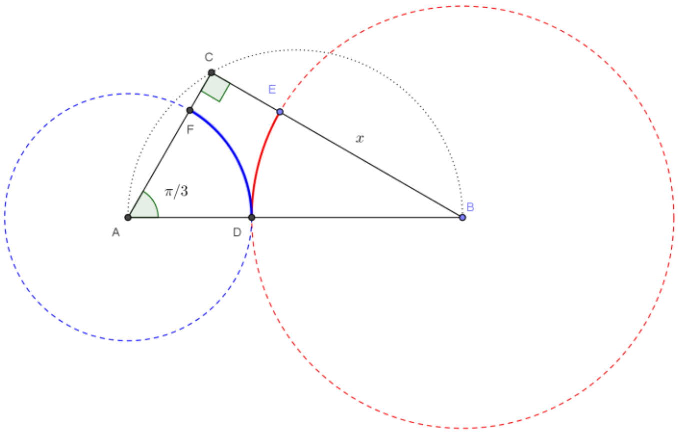
Scuole italiane all'estero (Calendario australe suppletiva) 2007

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = k e l'angolo $B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$*. Con centro in B e raggio x si tracci l'arco di circonferenza le cui intersezioni con i lati BA e BC siano, rispettivamente, D ed E. Con centro in A si tracci poi l'arco di circonferenza tangente in D alla circonferenza già tracciata e che intersechi in F il cateto AC.*



a)

Si specifichino le limitazioni da imporre a x affinché la costruzione sia realizzabile.

Affinché la circonferenza con centro in B intersechi il lato BC deve essere $x \leq BC$. Ma:

$$BC = ABsen\left(\frac{\pi}{3}\right) = k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad quindi: \; x \leq k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Inoltre la circonferenza di centro A deve intersecare il lato AC, ed è: $AC = \frac{1}{2}k$; essendo il raggio di questa circonferenza $AD = k - x$, dovrà essere: $AF = AD \leq AC = \frac{1}{2}k$, perciò:

$$k - x \leq \frac{1}{2}k \,, \; da\ cui: \; x \geq \frac{1}{2}k$$

La costruzione indicata è quindi realizzabile se: $\frac{1}{2}k \leq x \leq k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b)

Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo DECF.

L'area del quadrilatero mistilineo DECF si ottiene sottraendo all'area del triangolo ABC l'area dei settori circolari ODF e BDE.

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}k \cdot\ k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}k^2\sqrt{3}$$
$$Area(settore\ ODF) = \frac{1}{6}(\pi AD^2) = \frac{1}{6}(\pi \cdot (k-x)^2) = \frac{1}{6}\pi(k-x)^2$$
$$Area(settore\ BDE) = \frac{1}{12}(\pi BD^2) = \frac{1}{12}\pi x^2$$

$$Area(quadrilatero\ mistilineo\ DECF) = \frac{1}{8}k^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi(k-x)^2 - \frac{1}{12}\pi x^2 =$$

$$= \frac{1}{24}\left(3k^2\sqrt{3} - 4\pi(k^2 - 2kx + x^2) - 2\pi x^2\right) = \frac{1}{24}\left(3k^2\sqrt{3} - 4\pi k^2 + 8\pi kx - 6\pi x^2\right)$$

$$S = -\frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{1}{3}\pi kx + \frac{1}{8}k^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi k^2,\ \ con\ \ \frac{1}{2}k \leq x \leq k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ e\ \ k > 0$$

c)

Si trovino i valori massimo e minimo di S(x).

S(x) è un arco di parabola con la concavità rivolta verso il basso; l'ascissa del vertice è:

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{3}\pi k}{-\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{3}k$: tale valore è interno all'intervallo delle x, quindi il massimo è in corrispondenza del vertice della parabola ed il minimo è in uno degli estremi dell'intervallo.

$$Max(S) = S\left(\frac{2}{3}k\right) = -\frac{1}{4}\pi\frac{4}{9}k^2 + \frac{1}{3}\pi k\frac{2}{3}k\ + \frac{1}{8}k^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi k^2 = \left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{1}{6}\right)\pi k^2 + \frac{1}{8}k^2\sqrt{3}$$

$$Max(S) = S\left(\frac{2}{3}k\right) = -\frac{1}{18}\pi k^2 + \frac{1}{8}k^2\sqrt{3} = k^2\left(\frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{18}\pi\right) \cong 0.42k^2$$

Per trovare il minimo di S cerchiamo i valori agli estremi dell'intervallo delle x:

$$S(x) = -\frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{1}{3}\pi k x + \frac{1}{8}k^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi k^2$$

$$S\left(\frac{1}{2}k\right) = -\frac{1}{4}\pi\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{3}\pi\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{8}k^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi k^2 = -\frac{1}{16}\pi k^2 + \frac{1}{8}k^2\sqrt{3} = \frac{1}{16}(2\sqrt{3}-\pi)k^2 \cong$$
$$\cong 0.02k^2 = S\left(\frac{1}{2}k\right)$$

$$S\left(\frac{1}{2}k\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{4}\pi\frac{3}{4}k^2 + \frac{1}{3}\pi\frac{1}{2}k^2\sqrt{3} + \frac{1}{8}k^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi k^2 = \left(-\frac{3}{16} + \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\right)\pi k^2 + \frac{1}{8}k^2\sqrt{3} =$$

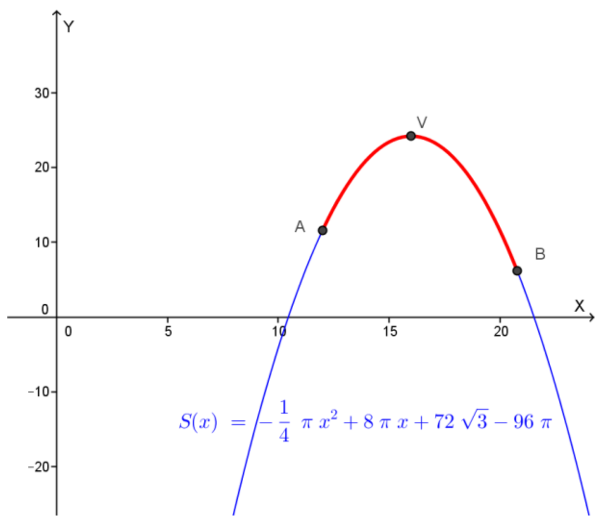
$$= \frac{1}{48}\pi k^2(8\sqrt{3}-17) + \frac{1}{8}k^2\sqrt{3} = \frac{1}{48}(8\pi\sqrt{3} - 17\pi + 6\sqrt{3})k^2 \cong 0.01\,k^2 = S\left(\frac{1}{2}k\sqrt{3}\right)$$

Essendo $S\left(\frac{1}{2}k\sqrt{3}\right) < S\left(\frac{1}{2}k\right)$ il minimo si S(x) si ha per $x = \frac{1}{2}k\sqrt{3}$ ed è

$$Min(S) = S\left(\frac{1}{2}k\sqrt{3}\right) = \frac{1}{48}(8\pi\sqrt{3} - 17\pi + 6\sqrt{3})k^2$$

La situazione grafica (esemplifichiamo prendendo k=24) è la seguente:

$$S(x) = -\frac{1}{4}\pi x^2 + 8\pi x + 72\sqrt{3} - 96\pi$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria