Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2007 – Suppletiva

QUESITO 1

Si vuole che delle due radici dell'equazione $x^2+2(h+1)x+m^2h^2=0$ *una risulti doppia dell'altra. Quale relazione deve sussistere tra i parametri h e m?*

Intanto imponiamo che le radici siano reali: $\frac{\Delta}{4}=0,\quad (h+1)^2-m^2h^2\geq 0\quad (1)$

Siccome una radice deve essere il doppio dell'altra deve risultare:

$x_1+x_2=3x_2=-\frac{b}{a}=-2(h+1),\quad x_2=-\frac{2}{3}(h+1)$; imponiamo che tale valore sia radice:

$$\frac{4}{9}(h+1)^2+2(h+1)\left[-\frac{2}{3}(h+1)\right]+m^2h^2=0,\quad \frac{4}{9}(h+1)^2-\frac{4}{3}(h+1)^2+m^2h^2=0$$

$-\frac{8}{9}(h+1)^2+m^2h^2=0$ (2)

Mettendo insieme le condizioni (1) e (2) abbiamo:

$$\begin{cases}(h+1)^2-m^2h^2\geq 0\\ -\frac{8}{9}(h+1)^2+m^2h^2=0\end{cases};\quad \begin{cases}(h+1)^2\geq m^2h^2\\ \frac{8}{9}(h+1)^2=m^2h^2\end{cases};\quad \begin{cases}(h+1)^2\geq \frac{8}{9}(h+1)^2\\ \frac{8}{9}(h+1)^2=m^2h^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}h^2+2h+1\geq 0;\quad (h+1)^2\geq 0,\ per\ ogni\ h\\ m^2=\dfrac{\frac{8}{9}(h+1)^2}{h^2}=\frac{8}{9}\left(\frac{h+1}{h}\right)^2,con\ h\neq 0\ (se\ h=0{:}\ \frac{8}{9}=0\ impossibile)\end{cases}$$

Quindi deve essere:

$$m^2=\frac{8}{9}\left(\frac{h+1}{h}\right)^2, con\ h\neq 0, da\ cui:\quad m=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}\left(\frac{h+1}{h}\right)$$

Quindi la relazione fra m ed h è: $m=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}\left(\frac{h+1}{h}\right),\quad con\ h\neq 0.$

QUESITO 2

Sia $f(x)=x+\sin x$ *per ogni x. Si trovino i punti x in corrispondenza dei quali il grafico di f in (x, f (x)) abbia coefficiente angolare nullo.*

Dobbiamo trovare i punti per i quali $f'(x)=0$, quindi: $1+cosx=0,\quad cosx=-1\quad da\ cui:$

$$x=\pi+2k\pi.$$

QUESITO 3

La risoluzione di un dato problema conduce all'equazione

$$k\, senx + cosx = 2k \qquad ove \quad k \geq 0 \qquad e \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Si discutano le possibili soluzioni del problema.

Posto X=cosx e Y=senx, la nostra equazione corrisponde al seguente sistema:

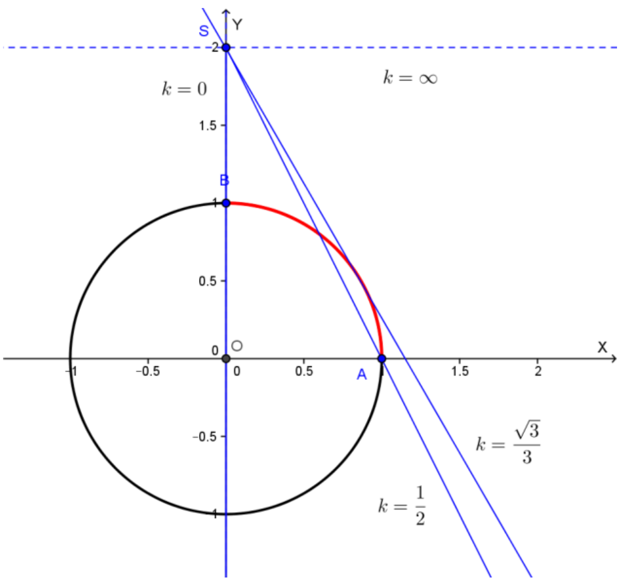
$$\begin{cases} kY + X = 2k \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ k \geq 0 \\ \frac{1}{2} \leq X \leq 1, \ \ 0 \leq Y \leq 1 \end{cases}$$

$kY + X = 2k, \quad X + k(Y-2) = 0$ rappresenta un fascio proprio di rette con generatrici $X = 0$ (per k=0) e $Y - 2 = 0$ (per $k = \infty$); quindi ha centro in $S = (0;2)$ L'arco di circonferenza che può essere intersecato ha estremi $A = (1{,}0)\ e\ B = (0;1)$. Cerchiamo i valori di k corrispondenti alle rette per A e B e alla retta tangente all'arco in questione:

retta per A: $k = \frac{1}{2}$; retta per B: $k = 0$; retta tangente (poniamo la distanza del centro della circonferenza dalla generica retta del fascio uguale al raggio r=1):

$$\frac{|-2k|}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \ , \qquad 4k^2 = 1 + k^2 \ , \ \ k = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Il coefficiente angolare della tangente che ci interessa è negativo; tale coefficiente angolare è: $m = -\frac{1}{k}$, quindi dobbiamo scegliere $k = +\frac{\sqrt{3}}{3}$. Abbiamo:



Si hanno quindi le seguenti soluzioni:

$$0 \leq k < \frac{1}{2}: \quad 1\ soluzione$$

$$\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3}: \quad 2\ soluzioni$$

QUESITO 4

Le nuove targhe automobilistiche sono costituite da 2 lettere, seguite da 3 cifre, seguite a loro volta da 2 lettere. Sapendo che le lettere possono essere scelte tra le 26 dell'alfabeto anglosassone, si calcoli quante automobili si possono immatricolare in questo modo.

Le possibilità dei primi due posti sono uguali alle disposizioni con ripetizioni di 26 oggetti a 2 a 2, quindi: ${D^r}_{26,2} = 26^2 = 676$.
Le possibilità dei tre posti centrali sono uguali alle disposizioni con ripetizioni di 10 oggetti (le 10 cifre) a 3 a 3, quindi: ${D^r}_{10,3} = 10^3 = 1000$.
Le possibilità degli ultimi due posti sono ancora uguali alle disposizioni con ripetizioni di 26 oggetti a 2 a 2, quindi: ${D^r}_{26,2} = 26^2 = 676$.

Il numero di automobili che si possono immatricolare sono quindi:

$$676 \cdot 1000 \cdot 676 = 456\,976\,000$$

Osserviamo che in realtà le targhe, per evitare confusioni nella lettura a distanza, non usano tutte le 26 lettere, ma solo 22; non vengono utilizzate le lettere I ed O per evitare confusioni con le cifre 1 e 0 e neanche le lettere Q ed U. Non viene neanche utilizzata la combinazione EE, per evitare confusioni con "Escursionisti Esteri".

Le targhe effettivamente immatricolabili sono quindi:

$$\left({D^r}_{22,2} - 1\right) \cdot {D^r}_{10,3} \cdot \left({D^r}_{22,2} - 1\right) = (675) \cdot 1000 \cdot (675) = 461 \cdot 720 \cdot 461 = 455\,625\,000$$

QUESITO 5

Si dia una definizione di poliedro regolare. Si dimostri che i poliedri regolari sono, a meno di similitudini, solo 5 e si dica quali sono.

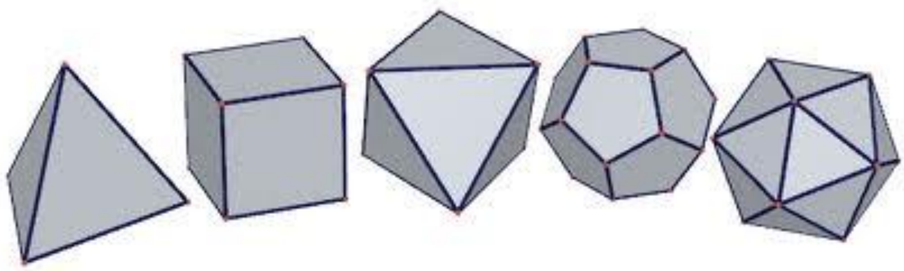
Un poliedro regolare è un poliedro le cui facce sono poligoni regolari congruenti e gli angoloidi sono tutti congruenti (come dire che in ogni vertice arriva lo stesso numero di facce).

I poliedri regolari (detti solidi platonici) sono 5, e tra essi non ce ne sono a facce esagonali.

Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro.
Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).
Con tre facce esagonali avremmo come somma almeno 120°x3=360°, quindi **non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.**

Si hanno infatti le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce degli angoloidi possono essere 3 (3x60°=180°<360°), 4 (4x60°=240°<360°), 5 (5x60°=300°<360°), ma non di più: con 6 facce avremmo 6x60°=360° che non è minore di 360°.
   Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.**
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 (3x90°=270°, ma 4x90°=360°): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo).**
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce (3x108°=324°): in questo caso si ha il **dodecaedro regolare.**
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo 3x120°=360°).
5.



La funzione $f(x) = x^9 - 9x + 9$ è continua e derivabile su tutto l'asse reale.
La sua derivata prima è:

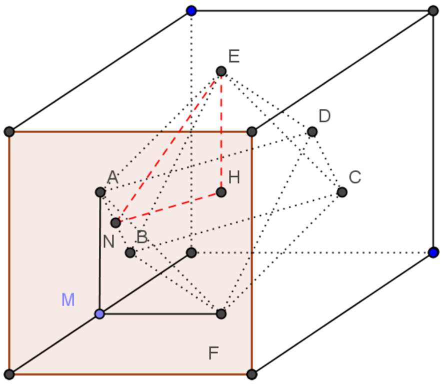
$$f'(x) = 9x^8 - 9 \geq 0 \ \ se \ \ x \leq -1, \ \ x \geq 1$$

Il grafico quindi è crescente per x<-1 e per x>1 e decrescente per -1<x<1, quindi x=-1 è punto di massimo relativo (con ordinata 17); x=1 è punto di minimo relativo (con ordinata 1). Siccome per x che tende a meno infinito la funzione tende a più infinito e per x che tende a più infinito tende a più infinito, il grafico qualitativo ci dimostra che la funzione si annulla una sola volta, quindi l'equazione data ha una sola soluzione reale:

QUESITO 6

Si considerino un cubo e l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle sue facce. Si può calcolare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro? In caso di risposta affermativa, effettuare il calcolo.

Consideriamo l'ottaedro che ha i vertici nei centri delle facce di un cubo. Verifichiamo che l'ottaedro è regolare.



Indicando con ℓ lo spigolo del cubo, notiamo che AF, che congiunge i centri di due facce del cubo perpendicolari, è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele AMF (dove M è il punto medio dello spigolo), con AM = MF = $\ell/2$; quindi $AF = \frac{\ell}{2}\sqrt{2}$.
Un ragionamento analogo si può fare per qualsiasi altro spigolo dell'ottaedro. Quindi tutti gli spigoli dell'ottaedro valgono $\frac{\ell}{2}\sqrt{2}$; le facce dell'ottaedro sono quindi triangoli equilateri uguali ed è perciò regolare.

Cerchiamo ora il rapporto tra il volume del cubo e quello dell'ottaedro.

Volume cubo = ℓ^3
Volume ottaedro = $2 \cdot \frac{AB^2 \cdot EH}{3}$
Siccome $AB = AF = \frac{\ell}{2}\sqrt{2}, \quad EH = \frac{EF}{2} = \frac{\ell}{2}$ risulta:

Volume ottaedro = $2 \cdot \frac{AB^2 \cdot EH}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell^2}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell^3}{6}$

Il rapporto richiesto fra i volumi è pertanto:

$$\frac{V(cubo)}{V(ottaedro)} = 6$$

QUESITO 7

Le misure dei lati di un triangolo sono 18, 24 e 30 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

Osserviamo che le misure dei lati del triangolo formano una terna pitagorica (si ottengono da 3, 4 e 5 moltiplicando per 6): il triangolo è quindi rettangolo con ipotenusa di 30 cm.

Risulta quindi:

$$sen\ \alpha = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}, \quad \alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right) \cong 36.87° = 36° + (0.87 \cdot 60)' \cong 36°52' = \alpha$$

L'altro angolo acuto è:

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 36°52' = 53°08' = \beta$$

QUESITO 8

Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x + k = 0\,.$$

Possiamo riscrivere l'equazione nella forma: $-x^3 + 3x = k$

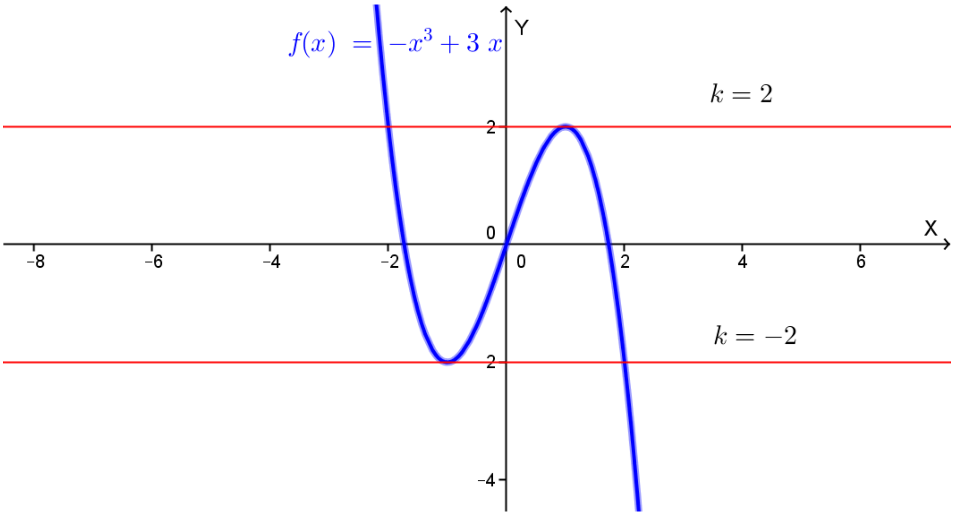
Studiamo qualitativamente la funzione $f(x) = -x^3 + 3x$.

Si tratta di una cubica che tende a più o meno infinito per x che tende a meno o più infinito. Ai fini del nostro quesito serve trovare il massimo ed il minimo relativi:

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \quad se \quad x = \pm 1$$

Risulta: $f(-1) = -2 \quad ed \quad f(1) = 2$

Si ha la seguente situazione grafica:



La retta per il massimo si ha quando:

$$k = 2$$

La retta per il minimo si ha quando:

$$k = -2$$

L'equazione ha quindi:

1 soluzione se $k < -2 \;\; vel \;\; k > 2$

3 soluzioni (di cui due coincidenti) se $k = \pm 2$

3 soluzioni distinte se $-2 < k < 2$

Con la collaborazione di Angela Santamaria