ORDINAMENTO 2007 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^{x}$$

1)

Si studi la funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

Dominio: $-\infty < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

Essendo $f(-x) = e^{-3x} + 2e^{-2x} - 3e^{-x}$ diverso sia da $f(x)$ sia da $-f(x)$ la funzione non né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = 0$.

Se $y = 0$, $e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^{x} = 0$, $e^{x}(e^{2x} + 2e^{x} - 3) = 0$, $e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0$,

$e^{2x} + 2e^{x} - 3 = (e^{x} + 3)(e^{x} - 1) = 0 \quad da\ cui \quad e^{x} - 1 = 0 \ : \quad x = 0$

Segno della funzione:

$y > 0 \quad se \ \ e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^{x} > 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{x}(e^{x} + 3)(e^{x} - 1) > 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{x} > 1: \ \ x > 0$

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty} (e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^{x}) = 0 \ : \quad y = 0 \ \ asintoto\ orizzontale$

$\lim_{x\to+\infty}(e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^{x}) = +\infty$:

non c’è asintoto obliquo perché la funzione non è un infinito del primo ordine,

Derivata prima:

$f'(x) = 3e^{3x} + 4e^{2x} - 3e^{x}$

$f'(x) \geq 0 \;\; se \quad e^x(3e^{2x}+4e^x-3) \geq 0 \;\; ; \;\; 3e^{2x}+4e^x-3=0 \;\; se:$

$e^x = \frac{-2-\sqrt{13}}{3}$ $\;\; oppure \;\; e^x = \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$ Quindi*:* $f'(x) \geq 0$ *se:* $3e^{2x}+4e^x-3 \geq 0$*, cioè:*

$e^x < \frac{-2-\sqrt{13}}{3}: \;\; mai$ *oppure* $e^x \geq \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \cong 0.54 \quad x \geq ln\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right) \cong -0.63$

Pertanto la funzione è crescente se $x > ln\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)$ e decrescente se $x < ln\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)$
In $x = ln\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right) \cong -0.63$ abbiamo un minimo relativo (e assoluto) di ordinata:

$$f\left(ln\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)\right) \cong -0.88$$

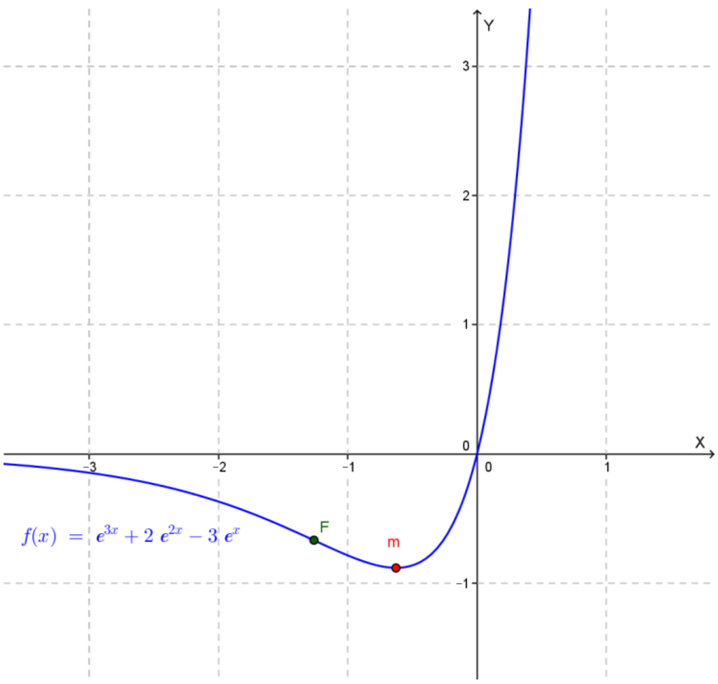
Derivata seconda:

$f''(x) = 9e^{3x}+8e^{2x}-3e^x \geq 0 \quad se \quad 9e^{2x}+8e^x-3 \geq 0$ cioè:

$e^x \leq \frac{-\sqrt{43}-4}{9} \;\; mai, \;\; oppure \;\; e^x \geq \frac{\sqrt{43}-4}{9} \cong 0.28$ da cui: $x \geq ln\left(\frac{\sqrt{43}-4}{9}\right) \cong -1.26$

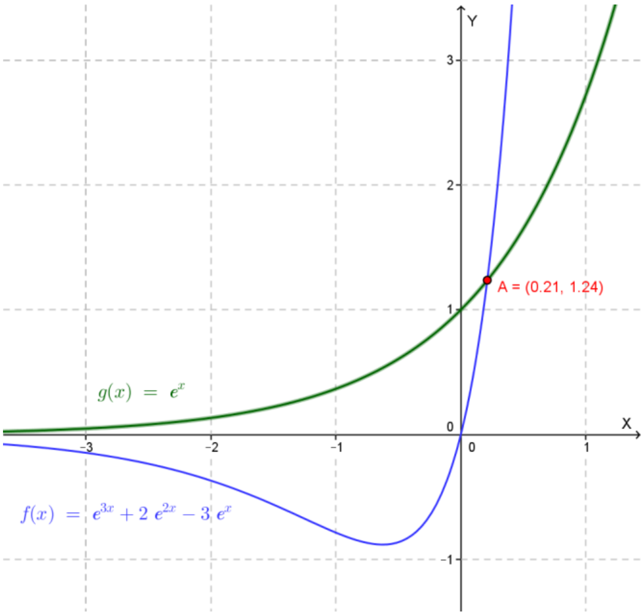
Pertanto il grafico volge la concavità verso l'alto se $x > ln\left(\frac{\sqrt{43}-4}{9}\right)$ e verso il basso se

$x < ln\left(\frac{\sqrt{43}-4}{9}\right)$; $x = ln\left(\frac{\sqrt{43}-4}{9}\right) \cong -1.26$ è punto di flesso, con ordinata $f\left(ln\left(\frac{\sqrt{43}-4}{9}\right)\right) \cong -0.67$
Il grafico della funzione è il seguente:



2)

Si determinino le coordinate del punto A, in cui la curva C incontra la curva C' rappresentativa dell'equazione $y = e^x$.



Le coordinate di A si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$\begin{cases} y = e^x \\ f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x \end{cases}$ da cui: $e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x = e^x$, $e^{2x} + 2e^x - 4 = 0$

$e^x = -\sqrt{5} - 1 \quad mai$ oppure $e^x = +\sqrt{5} - 1 \cong 1.24 \quad da\ cui \quad x = ln\left(\sqrt{5} - 1\right) \cong 0.21$

L'ordinata di A è $y = e^x = \sqrt{5} - 1$. Pertanto il punto richiesto è:

$A = \left(ln\left(\sqrt{5} - 1\right); \sqrt{5} - 1\right) \cong (0.21; 1.24)$

3)

Si scrivano l'equazione della tangente alla curva C nell'origine e l'equazione della tangente alla curva C' nel punto A.

La curva C ha equazione $f(x) = e^x$; cerchiamo il coefficiente angolare della tangente nell'origine:

$m = f'(0) = (3e^{3x} + 4e^{2x} - 3e^x)_{x=0} = 4$

Quindi la tangente in O alla curva C ha equazione: $y = 4x$

La curva C' ha equazione $f(x) = e^x$; cerchiamo il coefficiente angolare della tangente nel punto $A = \left(ln(\sqrt{5}-1); \sqrt{5}-1\right)$, ricordando che $f'(x) = e^x$.

$$m = f'\left(ln(\sqrt{5}-1)\right) = \sqrt{5}-1$$

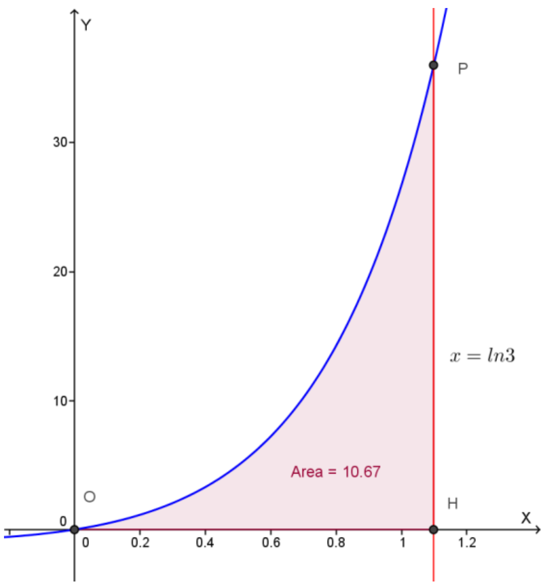
Quindi la tangente in A alla curva C' ha equazione:

$$y - \sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5}-1)\left(x - ln(\sqrt{5}-1)\right)$$

4)

Si *calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse x e dalla retta di equazione* $x = log3$.

La superficie S richiesta è indicata nella seguente figura.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^{ln3} (e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x)dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x} + e^{2x} - 3e^x\right]_0^{ln3} =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3ln3} + e^{2ln3} - 3e^{ln3} - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{1}{3}(e^{ln3})^3 + (e^{ln3})^2 - 3 \cdot 3 + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \cdot 27 + 9 - 9 + \frac{5}{3} =$$

$$= \frac{32}{3}\ u^2 \cong 10.67\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri