Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2009 – PROBLEMA 2

Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

1)

Si determinino a, b, c e d in modo che il grafico Γ *di p(x) abbia nei punti* $F(1,-2)$ *e* $M(2,-4)$ *rispettivamente il punto di flesso e il punto di minimo.*

Si tratta di una funzione razionale intera, quindi deve essere $p''(1) = 0$ ed $p'(2) = 0$.
Ma risulta:

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad e \quad p''(x) = 6ax + 2b$

Imponiamo le due condizioni $p''(1) = 0$ ed $p'(2) = 0$ insieme al passaggio per F ed M:

$$\begin{cases} 6a + 2b = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c + d = -2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = -3a \\ c = 0 \\ a - 3a + d = -2 \\ 8a - 12b + d = -4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = -3a \\ c = 0 \\ d = -2 + 2a \\ -4a - 2 + 2a = -4; \ a = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

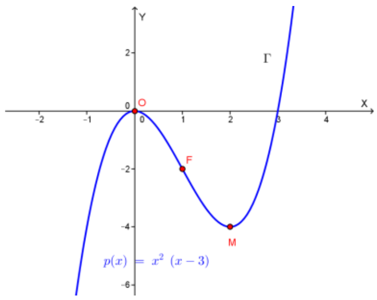
Quindi risulta: $p(x) = x^3 - 3x^2$.

2)

Verificato che $p(x) = x^3 - 3x^2$, *si disegni* Γ.

Trattandosi di una funzione razionale intera è definita su tutto R; il limiti al più o meno infinito sono rispettivamente più o meno infinito. Il suo grafico passa per l'origine degli assi e per il punto di ascissa x=3. La funzione può essere espressa nella forma:

$p(x) = x^2(x - 3)$, quindi ha una radice doppia in x=0, pertanto il suo grafico è tangente all'asse x nell'origine, che è punto di massimo relativo. Tutto ciò, insieme alle condizioni fornite sul flesso e sul minimo, è sufficiente per tracciare il grafico della funzione:



3)

Si determini il polinomio q(x) il cui grafico è simmetrico di Γ rispetto all'asse x.

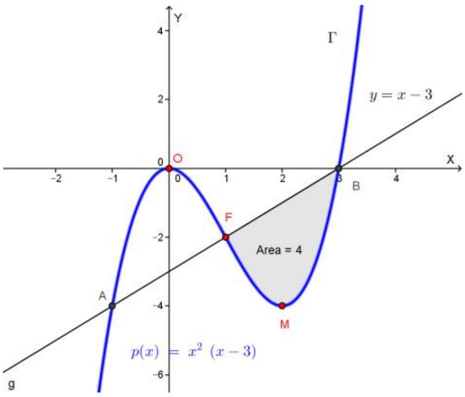
Risulta: $q(x) = -p(x) = -x^3 + 3x^2$

4)

Si determinino le aree di ciascuna delle due regioni che Γ delimita con la retta per F parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

La retta per F parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante ha equazione:

$y + 2 = x - 1, \quad y = x - 3.$



Per una nota proprietà ogni cubica è simmetrica rispetto al suo flesso, quindi le aree AOF e BFM sono uguali. Calcoliamo la seconda che è più immediata:

$$Area = \int_1^3 [(x-3) - (x^3 - 3x^2)]dx =$$

$$= \int_1^3 (-x^3 + 3x^2 + x - 3)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^3 = \left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9\right) + \frac{7}{4} = 4$$

Le due aree valgono quindi entrambe $4\,u^2$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria