PNI 2009 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

1)

Si determinino le costanti a e b in modo che risulti:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = \frac{10}{3} - 6ln\frac{5}{3}$$

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \left[2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}\right] dx = \left[2x + a \cdot ln(x+1) - \frac{b}{x+1}\right]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} + a \cdot ln\frac{5}{3} - \frac{3b}{5} - (-b) =$$

$$= \frac{4}{3} + a \cdot ln\frac{5}{3} + \frac{2}{5}b = \frac{10}{3} - 6ln\frac{5}{3} \quad \Longrightarrow \quad a = -6 \quad e \quad \frac{4}{3} + \frac{2}{5}b = \frac{10}{3} \quad \Longrightarrow \quad b = 5$$

Quindi risulta:

$$f(x) = 2 - \frac{6}{x+1} + \frac{5}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$$

2)

Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il γ .

$$f(x) = 2 - \frac{6}{x+1} + \frac{5}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$$

Dominio: $-\infty < x < -1$, $-1 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

Visto il dominio, la funzione non può essere né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = 1$. Se $y = 0$, $2x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta < 0, \nexists x$

Segno della funzione:

$y > 0 \quad se \quad \frac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2} > 0 \qquad \Longrightarrow \quad \forall x \;\; del\; dominio$

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-2x+1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 :$ $y = 2$ asintoto orizzontale.

$\lim_{x\to(-1)^\pm} \frac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2} = +\infty \;\; : \;\; x = -1$ asintoto verticale.

Derivata prima:

$y' = \frac{6x-4}{(x+1)^3} > 0 \;\; se\; x < -1 \quad or \quad x > \frac{2}{3}$: la funzione è crescente in $-\infty < x < -1$ e $\frac{2}{3} < x < +\infty$, decrescente in $-1 < x < \frac{2}{3}$.

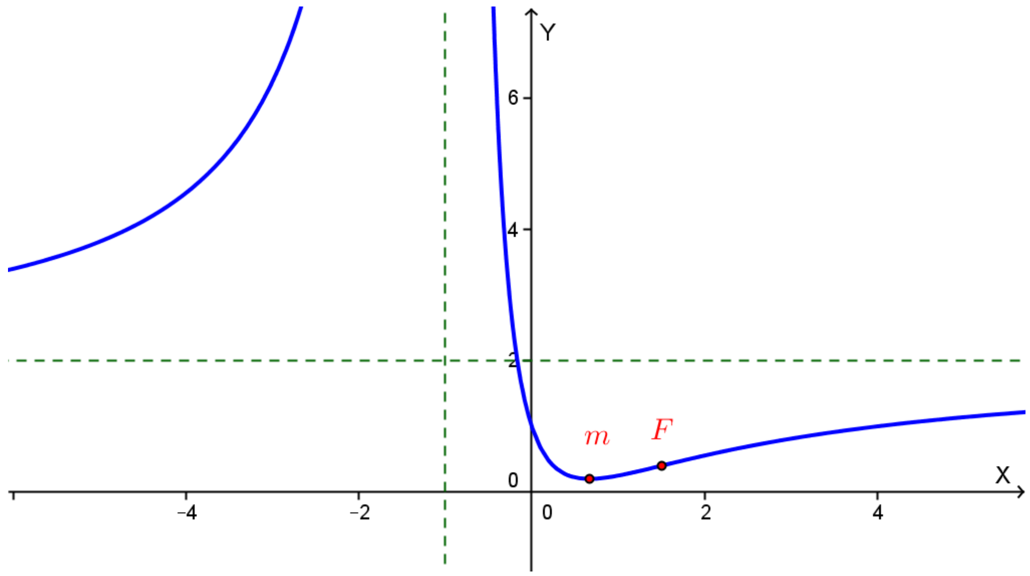
$x = \frac{2}{3}$ punto di minimo relativo (e assoluto), con valore $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}$

Derivata seconda:

$y'' = \frac{6(3-2x)}{(x^2+1)^4} \geq 0$ se $x \leq \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \; concavità\; verso\; l'alto se\; x < \frac{3}{2}\; , verso\; il\; basso\; se\; x > \frac{3}{2}$

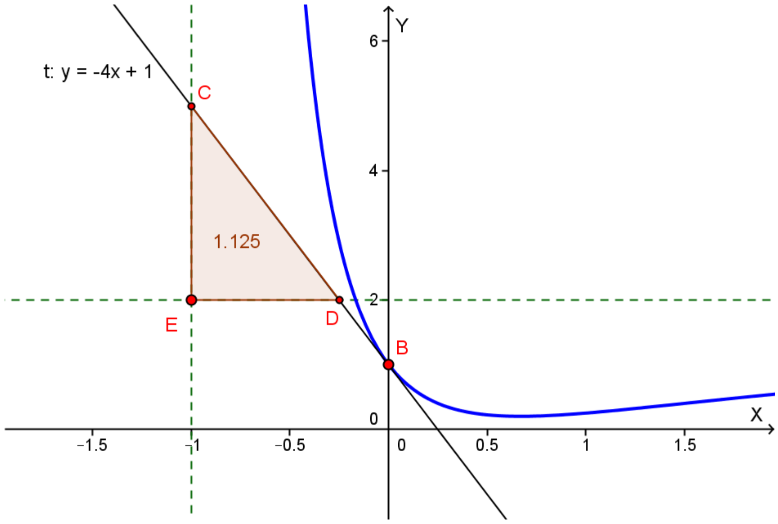
Flesso per $x = \frac{3}{2}$, con ordinata $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{5}$

Il grafico della funzione è il seguente:



3)

Si conduca la tangente a γ nel punto di ascissa $x = 0$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.



Il di ascissa 0 è $\mathrm{B} = (0;1)$. Siccome $f'(1) = -4$, la tangente in B ha equazione:

$$y - 1 = -4(x - 0) \quad \Longrightarrow \quad y = -4x + 1$$

Cerchiamo le intersezioni con gli asintoti.

Se $x = -1, \quad y = 5$: $C = (-1;5)$ se $y = 2$, $\quad x = -\frac{1}{4}$: $\quad D = (-\frac{1}{4};2)$; $E = (-1;2)$

$$A(CDE) = \frac{ED \cdot EC}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{4}+1\right)(5-2)}{2} = \frac{9}{8} \ u^2$$

4)

La retta $y = k$ incontri γ in due punti di ascissa x_1 e x_2 . Si esprimano, in funzione di k, la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità

$$S = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1}$$

è indipendente dal valore di k e se ne calcoli il valore.

Cerchiamo le intersezioni tra la curva e la retta:

$$\begin{cases} y = k \\ y = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} \end{cases} \implies \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = k \implies 2x^2 - 2x + 1 = k(x^2 + 2x + 1)$$

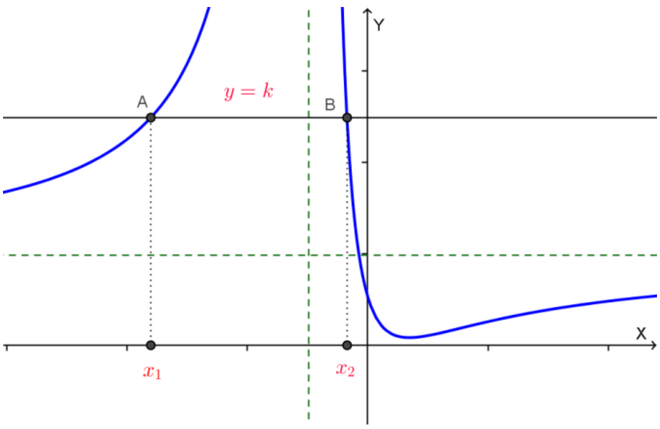
$(2-k)x^2 - 2(1+k)x + 1 - k = 0$.

Notiamo che affinché ci siano due intersezioni deve essere $k \neq 2$.

Calcoliamo la somma ed il prodotto delle radici:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(1+k)}{2-k} = \frac{2+2k}{2-k}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1-k}{2-k}$$



Calcoliamo ora la quantità S richiesta e verifichiamo che non dipende da k:

$$S = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{x_2 + 1 + x_1 + 1}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{x_2 + x_1 + 2}{x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{\dfrac{2+2k}{2-k} + 2}{\dfrac{1-k}{2-k} + \dfrac{2+2k}{2-k} + 1} =$$

$$= \frac{2+2k+4-2k}{1-k+2+2k+2-k} = \frac{6}{5} \quad , \quad \forall k \, .$$

Quindi $S = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{6}{5}$ per ogni valore di k.

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri