Scuole italiane all'estero (Americhe) 2010 – PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane Oxy:

1)

Si studi la funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{3}\,x}$ *e se ne tracci il grafico* γ.

Osserviamo che la curva può essere vista nella forma: $x^2 - \sqrt{3}\,xy + 1 = 0$ quindi è una conica ed in particolare (basta notare che ha l'asintoto verticale $x = 0$) un'iperbole.

Per rappresentarla graficamente basta determinare l'altro asintoto (obliquo), il massimo ed il minimo.

Per l'asintoto obliquo osserviamo che:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{3}\,x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+1}{\sqrt{3}\,x} - \frac{1}{\sqrt{3}}x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}\,x}\right] = 0$$

Quindi l'asintoto obliquo ha equazione:

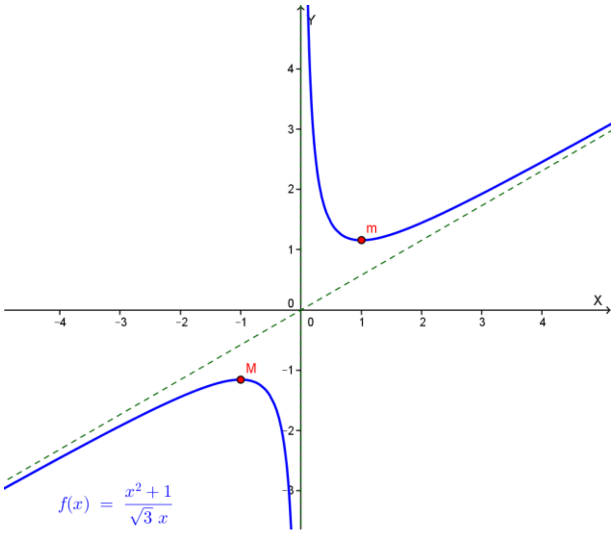
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\,x$ (retta per l'origine che forma un angolo di 30° con il semiasse positivo delle x).

Per il massimo e minimo calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3x^2} \geq 0 \;\; se \;\; 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0\,, \;\; x^2 - 1 \geq 0\,, \qquad x \leq -1, x \geq 1$$

Quindi la funzione è crescente per $x < -1, x > 1$ e perciò ha il massimo (relativo) per $x = -1$ (con ordinata $\frac{2}{\sqrt{3}}$) ed il minimo (relativo) per $x = 1$ (con ordinata $\frac{2}{\sqrt{3}}$).

Quindi il grafico della funzione è il seguente:



2)

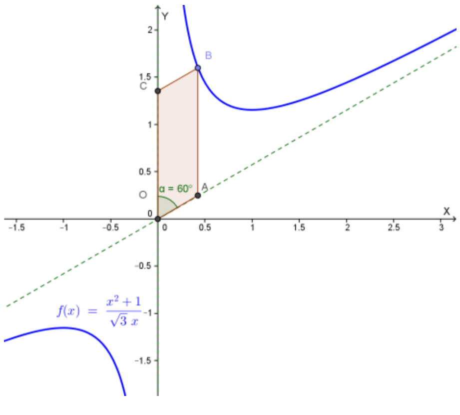
Si determini l'ampiezza degli angoli individuati dai due asintoti.

In base a quanto osservato nel punto precedente possiamo affermare che gli angoli individuati dai due asintoti hanno ampiezza di 60° e 120°.

3)

Si verifichi che il parallelogramma, avente due lati consecutivi sugli asintoti e un vertice su γ , ha area costante, mentre il suo perimetro ammette un valore minimo ma non un valore massimo.

Rappresentiamo il generico parallelogramma:



Il generico vertice B della curva (che possiamo supporre nel primo quadrante senza ledere la generalità, quindi t>0) ha coordinate del tipo $B = \left(t;\ \frac{t^2+1}{\sqrt{3}\,t}\right)$. Osservato che l'ascissa di A è t, abbiamo: $OA = \frac{t}{cos(30°)} = \frac{2t}{\sqrt{3}}$; inoltre l'ordinata di A è

$y_A = OA\ sen(30°) = \frac{t}{\sqrt{3}}$: Pertanto: $AB = OC = \frac{t^2+1}{\sqrt{3}\,t} - \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}\,t}$

L'area del parallelogramma è quindi:

$$Area(OABC) = OA \cdot OC \cdot sen(60°) = \frac{2t}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}\,t} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = costante$$

Calcoliamo il perimetro del parallelogramma:

$$2p(OABC) = 2OA + 2OC = 2\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}\,t}\right) = 2\frac{2t^2+1}{\sqrt{3}\,t}.$$

Il perimetro è massimo/minimo quando lo è la funzione:

$$f(t) = \frac{2t^2+1}{t}$$

$$f'(t) = 2 - \frac{1}{t^2} \geq 0 \quad se \quad 2t^2 - 1 \geq 0\,, t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi (considerando t>0) la funzione è crescente se $t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e decrescente da 0 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e siccome per t che tende a 0 (da destra) la funzione tende a più infinito, possiamo concludere che ha un minimo relativo (ed assoluto) per $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ mentre non ha massimo:

il perimetro del parallelogramma ammette un minimo ma non un massimo.

4)

Tra le infinite primitive di $f(x)$ si determini quella che passa per il punto di coordinate $(1; 0)$.

$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{3}\,x}$; cerchiamo la generica primitiva di f(x):

$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{3}\,x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right) + c$; tale primitiva passa per (1; 0) se:
$0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + 0\right) + c; \quad c = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

La primitiva richiesta è: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right) - \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria