Scuole italiane all'estero (Americhe) 2010 – PROBLEMA 2

E' dato il fascio di cubiche di equazione $y = kx^3 - kx^2 + 2kx + 1$, dove k è un parametro reale non nullo.

1)

Si verifichi che tutte le curve del fascio hanno in comune con l'asse delle y lo stesso punto C, di cui si chiedono le coordinate.

Cerchiamo le intersezioni fra le cubiche e l'asse delle y:

$$\begin{cases} y = kx^3 - kx^2 + 2kx + 1 \\ x = 0 \end{cases}; \quad y = 1$$

Quindi le curve del fascio hanno tutte in comune con l'asse delle y il punto C=(0;1).

2)

Si mostri che, qualunque sia il valore di k, la curva corrispondente incontra in un sol punto P_k l'asse delle x. Si verifichi altresì che se k=1 l'ascissa di P_1 è compresa fra -1 e 0.

Cerchiamo le intersezioni fra le cubiche e l'asse delle x:

$$\begin{cases} y = kx^3 - kx^2 + 2kx + 1 \\ y = 0 \end{cases}; \quad kx^3 - kx^2 + 2kx + 1 = 0\,; \; k(x^3 - x^2 + 2x) + 1 = 0\,;$$

$$x^3 - x^2 + 2x = -\frac{1}{k}$$

Studiamo in modo qualitativo la funzione $y = x^3 - x^2 + 2x$.

Si tratta di una funzione razionale intera, quindi è definita su tutto R; il suo grafico passa per l'origine degli assi; per x che tende a meno infinito tende a meno infinito e per x che tende a più infinito tende a più infinito. Analizziamo la derivata prima:

$y' = 3x^2 - 2x + 2 \geq 0 \;\; per\ ogni\ x\ (il\ delta\ è\ negativo),$ quindi la funzione è sempre crescente.

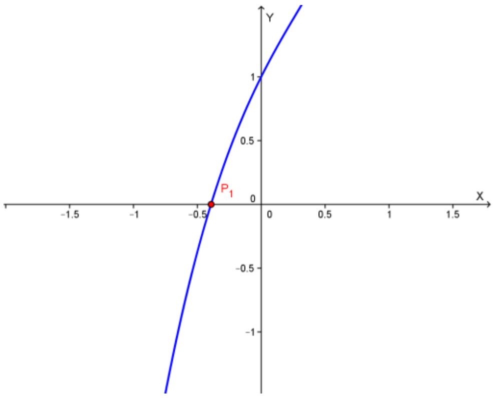
Pertanto la curva di equazione $y = x^3 - x^2 + 2x$ incontra la retta di equazione $y = -\frac{1}{k}$ (parallela all'asse x) in un solo punto:

questo vuol dire che le curve incontrano l'asse delle x in un solo punto P_k per ogni valore di k.

Per k=1 abbiamo: $y = x^3 - x^2 + 2x + 1$; in tal caso, tenendo presente quanto già detto nel punto precedente abbiamo:

se x=-1, y=-3; se x=0, y=1: quindi l'asse x è intersecato tra -1 e 0.

La situazione grafica (non richiesta) è la seguente:



3)

Si disegnino γ la curva del fascio corrispondente al valore $k = \frac{1}{4}$ e la retta t tangente a γ nel punto C.

Per $k = \frac{1}{4}$ la curva ha equazione:

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

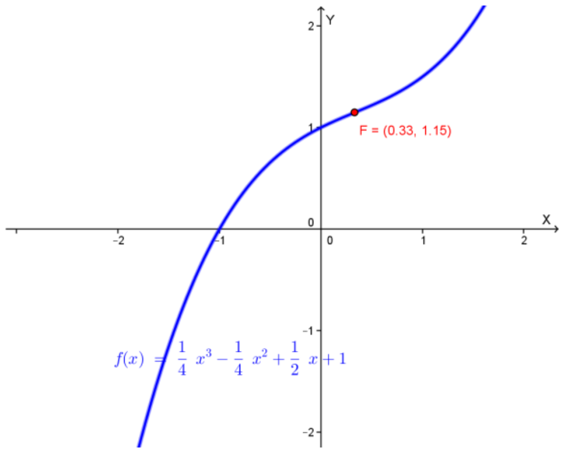
Abbiamo già verificato che il suo grafico passa per il punto (0; 1); per x che tende a meno infinito tende a meno infinito e per x che tende a più infinito tende a più infinito.
Analizziamo la derivata prima:

$y' = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \geq 0 \;\; se \;\; 3x^2 - 2x + 2 \geq 0\,, \;\; sempre\ verificato\ (delta\ negativo)$:

la funzione è quindi sempre crescente. Ricordiamo che una cubica ha sempre uno ed un solo flesso, cerchiamolo studiando la derivata seconda:

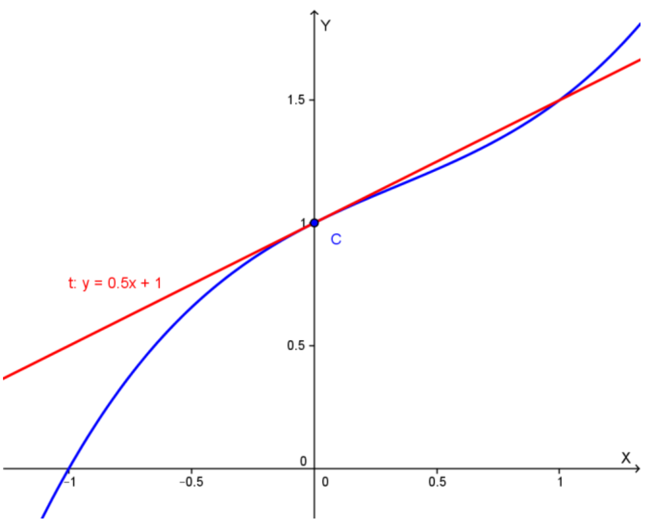
$y'' = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \geq 0 \;\; se \; x \geq \frac{1}{3}$: il grafico volge la concavità verso l'alto per $x > \frac{1}{3}$ e verso il basso per $x < \frac{1}{3}$; presenta un flesso per $x = \frac{1}{3}$, con ordinata $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{31}{27}$.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:



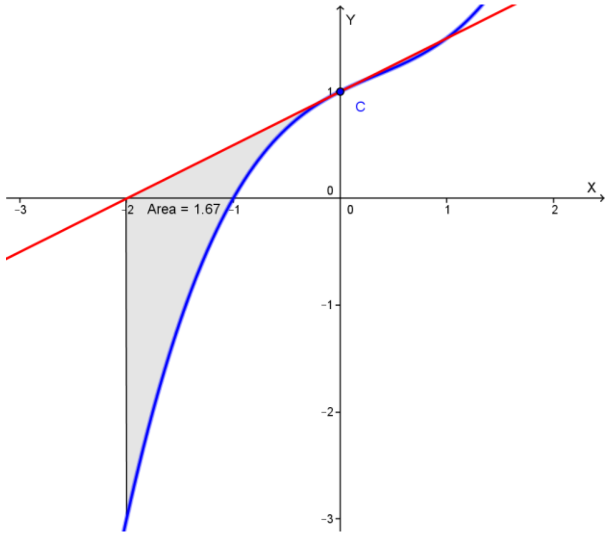
Determiniamo l'equazione della tangente in C=(0; 1). Risulta:

$m = f'(0) = \frac{1}{2}$; quindi la tangente t in C ha equazione: $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0),\ y = \frac{1}{2}x + 1$.



4)

Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da γ, da t e dalla retta di equazione $x = -2$.



L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area = \int_{-2}^{0} \left[\left(\frac{1}{2}x + 1 \right) - \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \right) \right] dx = \int_{-2}^{0} \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{12} \right]_{-2}^{0} = -\left(-1 - \frac{8}{12} \right) = \frac{5}{3}\, u^2 \cong 1.67\, u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria