Scuole italiane all'estero (Americhe) 2010 – Quesiti

QUESITO 1

Sia γ il grafico di $y = \frac{10x}{x^2+1}$. Si trovi l'equazione della retta normale a γ nel punto (2, 4).

Il coefficiente angolare della normale nel punto di ascissa 2 è $m = -\frac{1}{f'(2)}$.

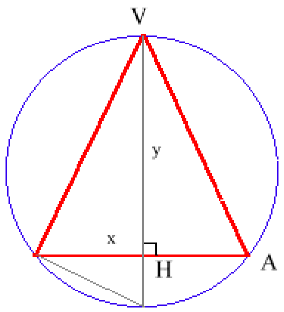
$$f'(x) = \frac{10(x^2+1) - 20x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-10\,x^2+10}{(x^2+1)^2}; \qquad f'(2) = -\frac{30}{25} = -\frac{6}{5}; \quad m = \frac{5}{6}$$

La normale richiesta ha equazione: $y - 4 = \frac{5}{6}(x-2)$, $6y - 24 = 5x - 10$,

$$5x - 6y + 14 = 0$$

QUESITO 2

Si determini il cono rotondo di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 30 cm.



Indichiamo con y l'altezza del cono e con x il suo raggio di base. Per il secondo teorema di Euclide si ha: $x^2 = y(60-y)$. Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Tale volume è massimo se lo è $z = x^2 y = y^2(60-y)$

Risoluzione elementare.

$y^2(60-y) = (y)^2(60-y)^1$: si tratta del prodotto di due potenze con somma delle basi costante (60); tale prodotto è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$\frac{y}{2} = \frac{60-y}{1}$, $y = 40$ $(altezza\ del\ cono\ uguale\ ai\ \frac{4}{3}\ del\ raggio\ della\ sfera)$

Il cono di volume massimo inscritto in una sfera di dato raggio è quello la cui altezza è i 4/3 del raggio della sfera (nel nostro caso altezza=40 cm).

Risoluzione analitica.

Dobbiamo trovare il massimo della funzione $z = y^2(60-y),\quad con\ 0 \le y \le 60$
Risulta:

$$z' = 120y - 3y^2 \ge 0 \quad se \quad y^2 - 40y \le 0:\ \ 0 \le y \le 40$$

La funzione è quindi crescente se $0 < y < 40$ e decrescente se $40 < y < 60$.

Per $y = 40$ z (e quindi anche il volume del cono) assume il valore massimo.

QUESITO 3

Quale è la derivata di $f(x) = 3^{\pi x}$ *? Si giustifichi la risposta.*

Possiamo riscrivere la funzione nella forma: $f(x) = e^{\ln(3^{\pi x})} = e^{\pi x \ln(3)}$
Siccome la derivata di $e^{f(x)}$ è $e^{f(x)} \cdot f'(x)$, abbiamo:

$D(3^{\pi x}) = D\left(e^{\pi x \ln(3)}\right) = e^{\pi x \ln(3)} \cdot (\pi \ln(3)) = 3^{\pi x} \cdot (\pi \ln(3))$.

Allo stesso risultato si può arrivare osservando che: $D\left(a^{f(x)}\right) = a^{f(x)} \cdot \ln(a) \cdot f'(x)$.
Ovviamente si può ottenere il risultato anche applicando la definizione di derivata (ma non è richiesto esplicitamente di ricorrere a tale metodo).

QUESITO 4

Si dimostri che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica.

Detti a e b due numeri positivi, abbiamo:

$$media\ aritmetica = m_A = \frac{a+b}{2}\ , \qquad media\ geometrica = m_G = \sqrt{ab}$$

Dobbiamo dimostrare che $m_G \le m_A$, cioè che: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \iff ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow 4ab \le (a+b)^2 \Rightarrow 0 \le (a-b)^2$: vero per ogni a e b.

Osserviamo che due medie sono uguali quando i due numeri sono uguali; infatti, se a=b:

$$\frac{a+b}{2} = a \ , \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a$$

N.B.

Il risultato vale anche per n numeri:

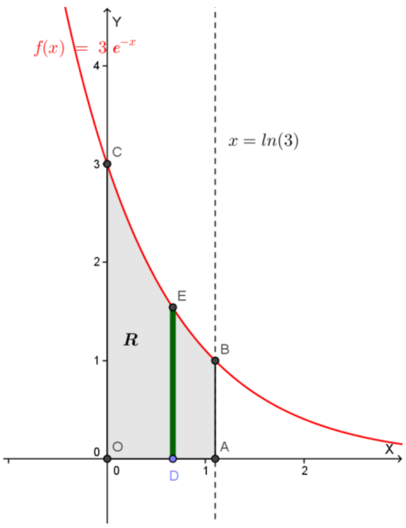
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

QUESITO 5

La regione R del primo quadrante delimitata dal grafico di $y = 3e^{-x}$ *e dalla retta* $x = ln3$ *è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.*

Rappresentiamo la regione R:

La sezione quadrata ha per lato $DE = f(x)$, e la sua area A(x) è quindi $f^2(x) = 9e^{-2x}$.



Il volume V(S) è quindi dato da:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_0^{\ln(3)} 9e^{-2x}dx = \left[-\frac{9}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln(3)} =$$

$$= -\frac{9}{2}\left[e^{-2\ln(3)} - 1\right] = -\frac{9}{2}\left[\left(e^{\ln(3)}\right)^{-2} - 1\right] =$$

$$= -\frac{9}{2}(3^{-2} - 1) = -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{9} - 1\right) = -\frac{9}{2}\left(-\frac{8}{9}\right) = 4$$

Quindi : $V(S) = 4\,u^3$

QUESITO 6

Un prisma a base quadrata ha altezza x e spigolo di base y tali che $x + y = 3$. *Quale è il suo volume massimo?*

Il volume del prisma in questione è: $V = y^2x = y^2(3-y), \ \ con\ x \ge 0\ ed\ y \ge 0$.

Metodo elementare.

$y^2x = (y)^2 \cdot x^1$ è il prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante (3), quindi è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti:

$$\frac{y}{2} = \frac{x}{1}\ ,\ \ y = 2x\ \ e\ quindi, essendo\ x + y = 3, \qquad x = 1\ e\ y = 2.$$

Metodo analitico.

Dobbiamo trovare il massimo della funzione $V = y^2(3 - y),\ \ con\ y \geq 0$. Risulta;

$$V' = 6y - 3y^2 \geq 0\ \ se\ \ y^2 - 2y \leq 0,\ \ 0 \leq y \leq 2$$

V è quindi crescente da 0 a 2 e decrescente da 2 in poi: è quindi massimo per $y = 2$; essendo $x + y = 3$ si ha che:

Il prisma di volume massimo ha lato di base 2 e altezza 1.

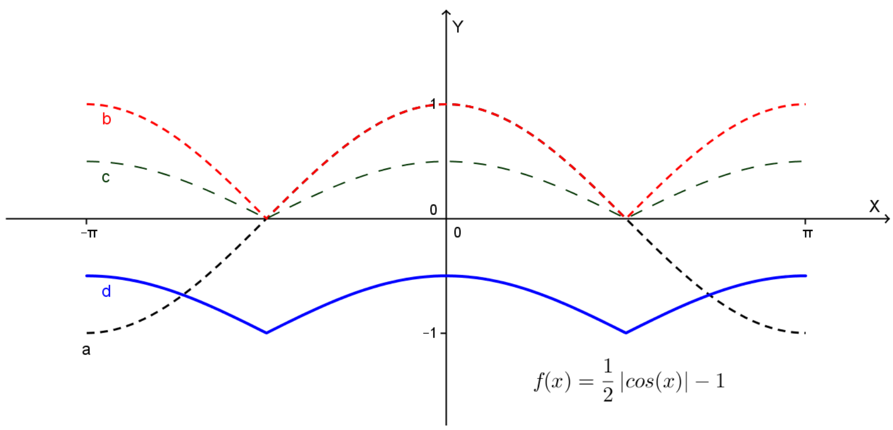
QUESITO 7

Si disegni, nell'intervallo $]-\pi;\pi]$, *il grafico della funzione* $f(x) = \frac{1}{2}|cosx| - 1$

Il grafico della funzione si ottiene mediante i seguenti passi:

- Grafico di $a(x) = cos(x)$
- Grafico di $b(x) = |cos(x)|$: si conferma la parte positiva e si ribalta la parte negativa rispetto all'asse x
- Grafico di $c(x) = \frac{1}{2}|\cos(x)|$: contrazione verticale di fattore 1/2.
- Grafico di $f(x) = \frac{1}{2}|cosx| - 1$: traslazione verso il basso di 1.

I passi indicati sono rappresentati nel grafico seguente:

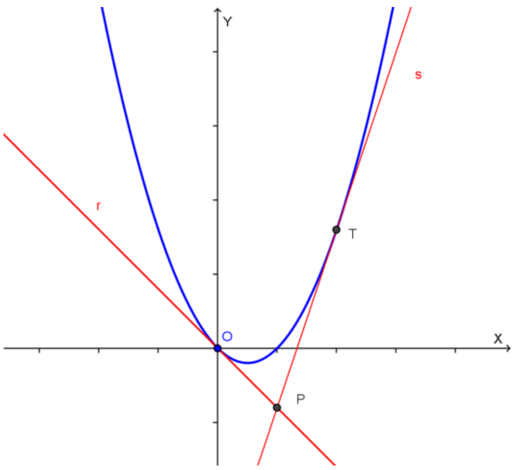


QUESITO 8

Si consideri una parabola del fascio $y = x^2 - ax$ e siano r e s le rette ad essa tangenti rispettivamente nell'origine del sistema di riferimento e nel punto T di ascissa $2a$. Sia P il punto di intersezione fra r e s. Si calcoli:

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{OP}{PT}$$

Osserviamo che la parabola ha vertice in $V = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a^2}{4}\right)$, passa per l'origine degli assi cartesiani e taglia l'asse x, oltre che in x=0, in x=a. Risulta $T = (2a;\ 2a^2)$.



Cerchiamo le tangenti in O e T. Risulta:

$$y' = 2x - a, quindi:\ \ m_O = -a\ \ \ ed\ \ m_T = 3a$$

$$r:\ y - 0 = -a(x - 0):\ \ \ y = -ax\ ;\ \ \ \ s:\ y - 2a^2 = 3a(x - 2a):\ y = 3ax - 4a^2$$

Cerchiamo il punto P:

$$P: \begin{cases} y = -ax \\ y = 3ax - 4a^2 \end{cases} ;\ \ \begin{cases} y = -ax \\ -ax = 3ax - 4a^2 \end{cases} ;\ \ \begin{cases} y = -ax \\ x = a \end{cases} ;\ \ P = (a;\ -a^2)$$

Osserviamo che se a=0 T coincide con O e le due rette r ed s coincidono.
Risulta:

$$OP = \sqrt{a^2 + a^4} = |a|\sqrt{1 + a^2}\ \ \ ;\ \ \ \ \ \ PT = \sqrt{a^2 + 9a^2} = |a|\sqrt{1 + 9a^2}$$

Quindi:

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{OP}{PT} = \lim_{a \to +\infty} \frac{|a|\sqrt{1 + a^2}}{|a|\sqrt{1 + 9a^2}} = \lim_{a \to +\infty} \sqrt{\frac{1 + a^2}{1 + 9a^2}} = \frac{1}{3}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria