ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico

Sessione suppletiva 2010

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

(AMERICA- emisfero boreale)[1]

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane $\mathsf{O}xy$, si consideri la parabola d'equazione $y = ax^2$ con a numero reale.

a) Si descriva come varia il grafico della parabola al variare di a.

b) Si determini a in modo che la parabola corrispondente λ stacchi sulla retta r d'equazione $y = x+4$, nel semipiano delle ordinate positive, un segmento $\overline{\mathsf{PQ}}$ di lunghezza $6\sqrt{2}$.

c) Sia A il punto in cui la retta r taglia l'asse delle x. Si calcolino l'area del triangolo mistilineo APQ e l'area del segmento parabolico di base $\overline{\mathsf{PQ}}$.

d) Si determini il punto M dell'arco di λ di estremi P e Q per il quale è massima l'area del triangolo PMQ.

Problema 2

Il trapezio rettangolo ABCD ha la base maggiore $\overline{\mathsf{AB}}$ e il lato obliquo $\overline{\mathsf{AD}}$ entrambi di lunghezza 1.

a) Si esprima il perimetro del trapezio in funzione dell'angolo acuto $\mathsf{D}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{B} = \delta$.

b) Si studi la funzione $f(\delta)$ ottenuta e se ne tracci il grafico nell'intervallo di definizione.

c) Si determini il trapezio di perimetro massimo.

d) Si affronti il problema di determinare il trapezio di perimetro massimo studiando la funzione $g(x)$ ove è $x = |\overline{\mathsf{BC}}|$.

Questionario

1. Fra tutti i coni inscritti in una sfera si trovi quello di volume massimo.
2. Si enunci il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* e se ne illustrino il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle funzioni.
3. Si dimostri che il prodotto di due numeri positivi che hanno somma costante è massimo quando i due numeri sono uguali.
4. Si tracci il grafico di $y = |x^5 - 1|$.
5. Nel piano riferito a un sistema di coordinate $\mathsf{O}xy$, si consideri la regione R delimitata dal grafico di $y = e^x$, dagli assi cartesiani e dalla retta $x = \ln(1/2)$. Si calcoli l'area di R.

[1] Testo tratto da http://www.batmath.it/esame/temi/tutti_temi.pdf

6. Cosa si intende per periodo di una funzione? Si spieghi il procedimento da seguire per determinare il periodo della funzione:
$$f(x) = \sin(3x+1).$$

7. Si determini il campo di esistenza della funzione:
$$f : x \mapsto x^2 - x - \ln x.$$
La f ha caratteristiche di simmetria? È invertibile? Si tracci il grafico di f.

8. Sia f la funzione polinomiale definita per ogni x reale da
$$f(x) = x^4 + 5x^2 + 3.$$
Allora $f(x^2-1)$ è dato per ogni x da:

   A) $x^4 + 5x^2 + 1$;
   B) $x^4 + x^2 - 3$;
   C) $x^4 - 5x^2 + 1$;
   D) $x^4 + x^2 + 3$;
   E) nessuna di queste.

   Una sola delle risposte indicate è quella corretta. Si giustifichi la risposta.