Scuole italiane all'estero (Americhe boreale suppletiva) 2010

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la parabola d'equazione $y = ax^2$, con a numero reale.

a)

Si descriva come varia il grafico della parabola al variare di a.

Se $a = 0$ la parabola si riduce ad una retta ($y = 0$). Se a non è nullo abbiamo una parabola con il vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse y; per $a > 0$ la concavità è verso l'alto, con $a < 0$ verso il basso.

b)

Si determini a in modo che la parabola corrispondente λ stacchi sulla retta r d'equazione $y = x + 4$, nel semipiano delle ordinate positive, un segmento PQ di lunghezza $6\sqrt{2}$.

Intersechiamo la generica parabola (che deve avere a>0) con la retta:

$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = x + 4 \end{cases}$; $ax^2 - x - 4 = 0$; $x = \frac{1\pm\sqrt{1+16a}}{2a}$, quindi

$$P: \begin{cases} x = \dfrac{1-\sqrt{1+16a}}{2a} \\ y = \dfrac{1-\sqrt{1+16a}}{2a} + 4 \end{cases} \quad ; \quad Q: \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{1+16a}}{2a} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{1+16a}}{2a} + 4 \end{cases}$$

$$PQ = 6\sqrt{2}\ ,\ \ PQ^2 = 72: \quad \left(\frac{\sqrt{1+16a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1+16a}}{a}\right)^2 = 72\ ;\ \left(\frac{\sqrt{1+16a}}{a}\right)^2 = 36\ ;$$

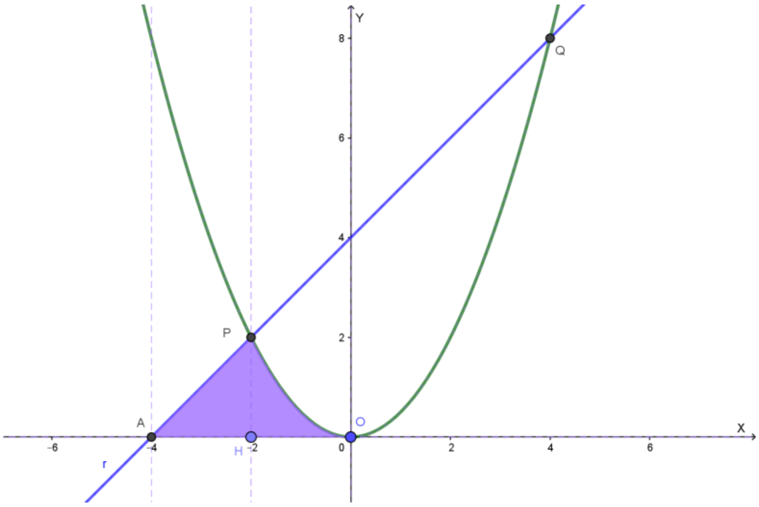
$$\frac{\sqrt{1+16a}}{a} = \pm 6\ \ (= -6\ non\ accettaile\ perchè\ a > 0)\ ,\ \ \sqrt{1+16a} = 6a\ ,$$

$$36a^2 - 16a - 1 = 0\ ,\ \ a = -\frac{1}{18}\ (non\ accettabile), a = \frac{1}{2}:\ \ y = \frac{1}{2}x^2$$

c)

Sia A il punto in cui la retta r taglia l'asse delle x. Si calcolino l'area del triangolo mistilineo APQ e l'area del segmento parabolico di base PQ.

A=(-4; 0): APQ ha area nulla e non è un triangolo mistilineo…. **Probabilmente si intendeva il triangolo mistilineo APO**; cerchiamo l'area del triangolo mistilineo APO.



Le coordinate di P si ottengono dal punto precedente ponendo $a = \frac{1}{2}$: $P = (-2; 2)$.
L'area del triangolo mistilineo è data da:

$$Area(triangolo\ APH) + \int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x^2\, dx = 2 + \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-2}^{0} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}\ u^2 \cong 3.33\ u^2$$

Per determinare l'area del segmento parabolico di base PQ cerchiamo la parallela ad r tangente alla parabola: tale tangente ha coefficiente angolare 1, quindi è del tipo:

$y = x + q$. Imponiamo che tale retta sia tangente alla parabola:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x + q \end{cases} ; \ \frac{1}{2}x^2 = x + q \ , \quad x^2 - 2x - 2q = 0\, , \frac{\Delta}{4} = 0, \ \ 1 + 2q = 0, \qquad q = -\frac{1}{2}$$

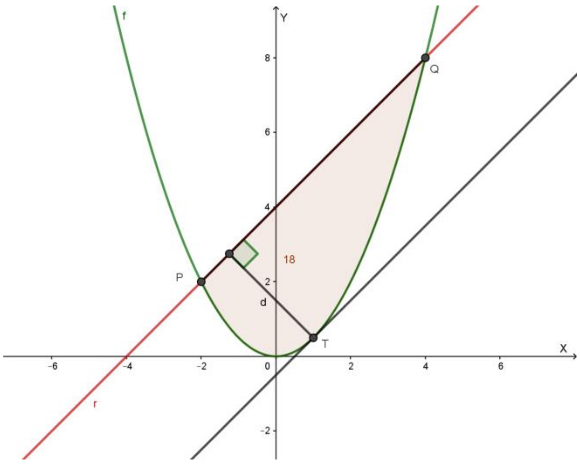
Quindi la tangente richiesta ha equazione: $y = x - \frac{1}{2}$.
Calcoliamo il punto T di tangenza con la parabola: la sua ascissa è tale che $y'(x_T) = 1, quindi\ x_T = 1$ e la sua ordinata: $y_T = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ :\ \ T = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Calcoliamo la distanza d di T dalla retta r, che scriviamo nella forma implicita:

$$x - y + 4 = 0; \qquad d = \frac{|ax_T + by_T + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\left|1 - \frac{1}{2} + 4\right|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

Quindi, per il Teorema di Archimede, l’area del segmento parabolico è:

$$Area(segmento\ parabolico) = \frac{2}{3}\overline{PQ}\cdot d = \frac{2}{3}\left(6\sqrt{2}\right)\frac{9}{2\sqrt{2}} = 18\ u^2$$



Oppure:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x + 4 \end{cases} \quad ; \quad P(-2;2), Q(4;4)$$

Quindi l’area del segmento parabolico è:

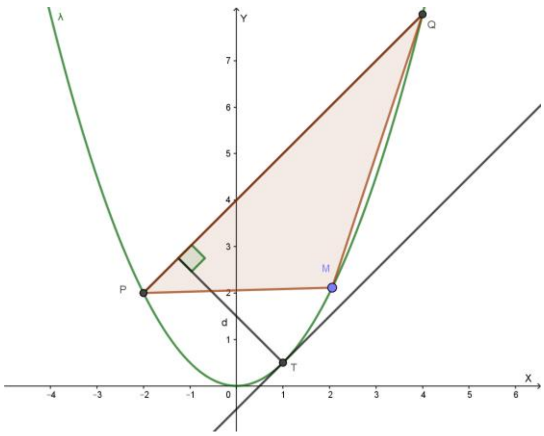
$$\int_{-2}^{4}\left(x + 4 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{1}{6}x^3\right]_{-2}^{4} =$$

$$= \cdots = 18\ u^2$$

d)

Si determini il punto M dell’arco di λ di estremi P e Q per il quale è massima l’area del triangolo PMQ.

Il triangolo PMQ, di base fissa PQ, ha area massima quando è massima l’altezza relativa alla base PQ. Tale altezza è massima quando P coincide con T, punto di tangenza della parabola con la parallela alla retta a PQ. Come visto nel punto precedente, $T = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.



Quindi il punto M richiesto ha coordinate: $M = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria