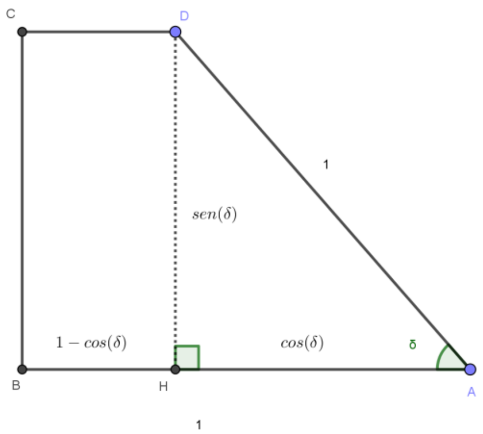
Scuole italiane all'estero (Americhe boreale suppletiva) 2010

PROBLEMA 2

Il trapezio rettangolo ABCD ha la base maggiore AB e il lato obliquo AD entrambi di lunghezza 1.

a)

Si esprima il perimetro del trapezio in funzione dell'angolo acuto $D\hat{A}B = \delta$.



Risulta: $BC = DH = sen(\delta)$, $CD = BH = 1 - \cos(\delta)$, quindi:

$$2p(ABCD) = 2 + sen(\delta) + 1 - \cos(\delta) = 3 + sen(\delta) - \cos(\delta) = 2p(ABCD), \qquad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

b)

Si studi la funzione $f(\delta)$ *ottenuta e se ne tracci il grafico nell'intervallo di definizione.*

$$\boldsymbol{f(\delta) = 3 + sen(\delta) - \cos(\delta)} \ , \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

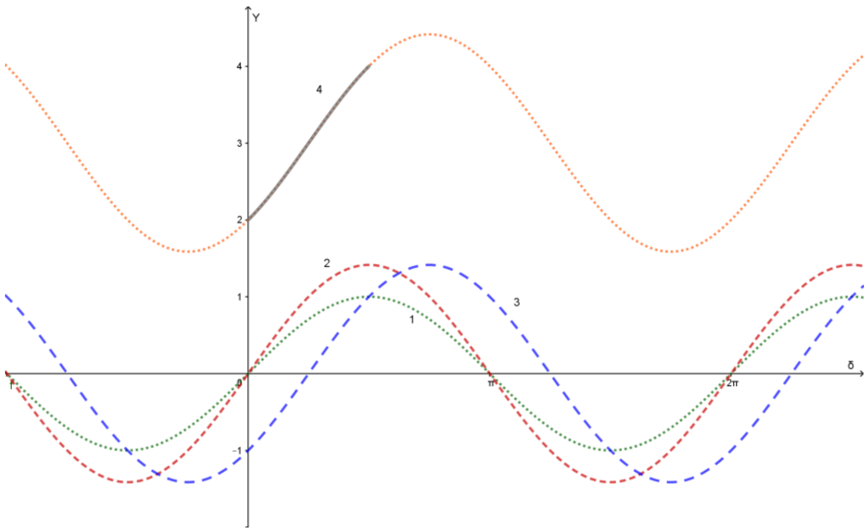
La funzione può essere espressa nella forma:

$$y = f(\delta) = 3 + sen(\delta) - co\,s(\delta) = 3 + \sqrt{2}\ sen\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right) = y$$

Il grafico di questa funzione si ottiene dal grafico di $y = sen(\delta)$ mediante le seguenti trasformazioni geometriche:

1) $y = sen(\delta)$
2) $y = \sqrt{2}\, sen(\delta)$: dilatazione verticale di fattore $\sqrt{2}$.
3) $y = \sqrt{2}\ sen\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right)$: traslazione di vettore $\vec{v} = \left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$
4) $y = 3 + \sqrt{2}\ sen\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right)$: traslazione di vettore $\vec{v} = (0; 3)$

Indichiamo i vari passi nella figura seguente:



c)

Si determini il trapezio di perimetro massimo.

Il perimetro del trapezio è massimo quando è massima la funzione

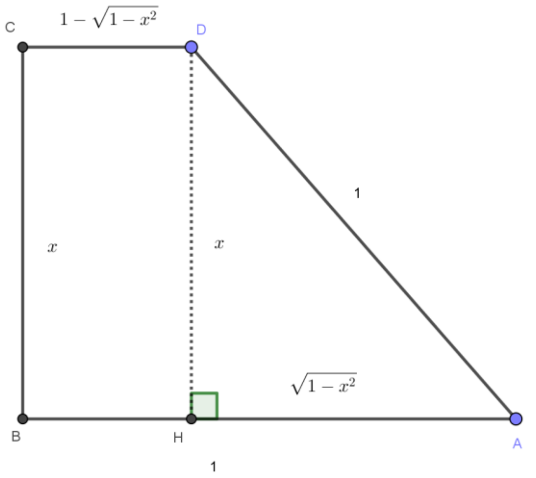
$$f(\delta) = 3 + \sqrt{2}\ sen\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right), \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

Se consideriamo l'intervallo $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ (come è giusto, essendo l'angolo δ acuto), il perimetro non ammette massimo (la funzione è sempre crescente nell'intervallo in questione).

Se invece prendiamo come intervallo $0 \le \delta \le \frac{\pi}{2}$, il perimetro è massimo quando $\delta = \frac{\pi}{2}$, ed il perimetro massimo vale $3 + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$: il trapezio diventa un quadrato di lato 1.

d)

Si affronti il problema di determinare il trapezio di perimetro massimo studiando la funzione $g(x)$ ove è $x = \overline{BC}$.



Se $x = BC$ risulta: $AH = \sqrt{1-x^2}$, $CD = 1 - \sqrt{1-x^2}$ quindi:

$$2p = g(x) = 2 + x + 1 - \sqrt{1-x^2} = 3 + x - \sqrt{1-x^2}, \quad con\ \ 0 \le x \le 1$$

$$\left(equivalente\ al\ caso\ precedentemente\ studiato\ considerando\ \ 0 \le \delta \le \frac{\pi}{2}\ \right)$$

Dobbiamo quindi studiare il massimo della funzione

$$g(x) = 3 + x - \sqrt{1-x^2}, \quad con\ \ 0 \le x \le 1$$

$$g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ge 0, \ \ \sqrt{1-x^2} + x \ge 0 \ \ sempre\ se\ 0 \le x \le 1\ .$$

La funzione è quindi sempre crescente nell'intervallo [0; 1], pertanto il suo massimo si ha per x=1 (e risulta $2p = 4$, come trovato precedentemente): il trapezio diventa un quadrato di lato 1.

Con la collaborazione di Angela Santamaria