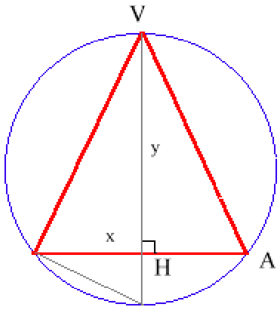
Scuole italiane all'estero (Americhe boreale suppletiva) 2010 – Quesiti

QUESITO 1

Fra tutti i coni inscritti in una sfera si trovi quello di volume massimo.



Indichiamo con y l'altezza del cono, con x il suo raggio di base e con R il raggio della sfera. Per il secondo teorema di Euclide si ha: $x^2 = y(2R - y)$. Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Tale volume è massimo se lo è $z = x^2 y = y^2(2R - y)$

Risoluzione elementare.
$y^2(2R - y) = (y)^2(2R - y)^1$: si tratta del prodotto di due potenze con somma delle basi costante (2R); tale prodotto è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{y}{2} = \frac{2R - y}{1}, \quad y = \frac{4}{3}R \ \ (altezza\ del\ cono\ uguale\ ai\ \ \frac{4}{3}\ \ del\ raggio\ della\ sfera)$$

Il cono di volume massimo inscritto in una sfera di dato raggio è quello la cui altezza è i 4/3 del raggio della sfera.

Risoluzione analitica.
Dobbiamo trovare il massimo della funzione $z = y^2(2R - y), \quad con\ 0 \le y \le 2R$
Risulta:

$$z' = 4Ry - 3y^2 \ge 0 \quad se \quad 3y^2 - 4Ry \le 0: \ \ 0 \le y \le \frac{4}{3}R$$

La funzione è quindi crescente se $0 \le y < \frac{4}{3}R$ e decrescente se $\frac{4}{3}R < y \le 2R$.
Per $y = \frac{4}{3}R$ z (e quindi anche il volume del cono) assume il valore massimo.

QUESITO 2

Si enunci il teorema del valor medio o di Lagrange e se ne illustrino il legame con il teorema di Rolle e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle funzioni.

Il teorema di Lagrange afferma che:

se una funzione y=f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [a; b] e derivabile nell'intervallo (a; b) allora esiste almeno un punto c in (a; b) tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\,.$$

Osserviamo che i punti $A=\big(a;f(a)\big)\ e\ \ B=(b;f(b))$ sono gli estremi del grafico della funzione di equazione y=f(x); inoltre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta AB ed $f'(c)$ è il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto di ascissa c.
Il teorema di Lagrange ha il seguente significato geometrico:

nelle ipotesi del teorema esiste almeno un punto interno all'arco di curva AB in cui la tangente è parallela alla congiungente i punti A e B.

Legame con il teorema di Rolle.

Il teorema di Rolle può essere considerato un corollario del teorema di Lagrange. In esso si aggiunge l'ipotesi che f(a)=f(b) e si ha come tesi: esiste almeno un punto c in (a; b) tale che: $f'(c)=0$. Dal teorema di Lagrange si ha infatti:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{0}{b-a}=0.$$

Il significato geometrico diventa ora: esiste almeno un punto C del grafico della funzione tra $A=\big(a;f(a)\big)\ e\ B=(b;f(b))$ a tangente orizzontale.

Implicazione del teorema di Lagrange nello studio di una funzione.

Come corollario del teorema di Lagrange si dimostra che:

se la derivata di una funzione è sempre positiva (negativa) nei punti interni di un intervallo chiuso e limitato [a; b], allora la funzione è crescente (decrescente) in tale intervallo.

QUESITO 3

Si dimostri che il prodotto di due numeri positivi che hanno somma costante è massimo quando i due numeri sono uguali.

Questa proprietà può essere dimostrata in **modo elementare** a partire dall' identità:

$$(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2-(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2=4\mathrm{xy}$$

da cui è facile capire che, se $x+y$ è costante, il massimo di $4xy$ (quindi di xy), si ha quando $(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2=0$, cioè se $x=y$.

ALTRO MODO

Indicata con s la somma (costante) dei due numeri si ha:

$x+y=s \quad con \quad 0\leq x\leq s$

$y=s-x \quad con \quad 0\leq y\leq s$

$p=x\cdot y=x(s-x)=-x^2+sx$

che rappresenta una parabola con la concavità verso il basso, il cui massimo si ha in corrispondenza del vertice:

$x=\frac{s}{2}$ (che soddisfa le condizioni della x), $y=s-x=s-\frac{s}{2}=\boldsymbol{\frac{s}{2}}$ da cui $x=y$, quindi il prodotto è massimo quando i due numeri sono uguali.

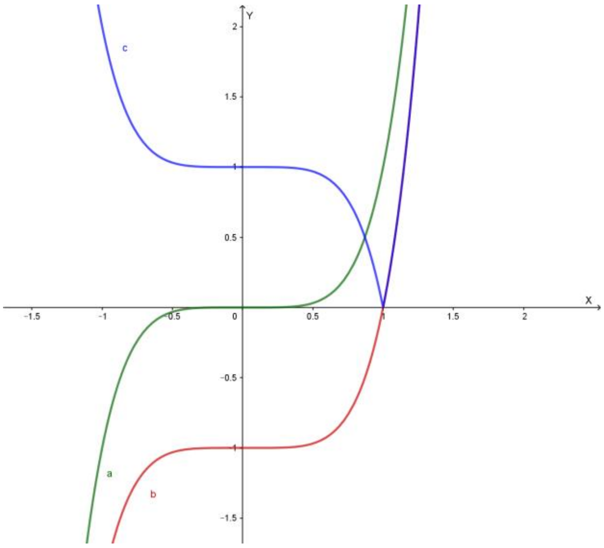
N.B. Il problema potrebbe essere risolto anche col **metodo delle derivate** studiando il segno della derivata di p: $p'=-2x+s>0 \quad se\ x<\frac{s}{2}$, quindi p è crescente se $0\leq x<\frac{s}{2}$ e decrescente se $\frac{s}{2}<x\leq s$, quindi in $x=\frac{s}{2}$ c'è il massimo assoluto di p.

QUESITO 4

Si tracci il grafico di $y = |x^5 - 1|$.

Il grafico della funzione si può dedurre dal grafico di $y = x^5$ effettuando prima una traslazione verso il basso di 1 e poi ribaltando la parte negativa rispetto all'asse delle x:

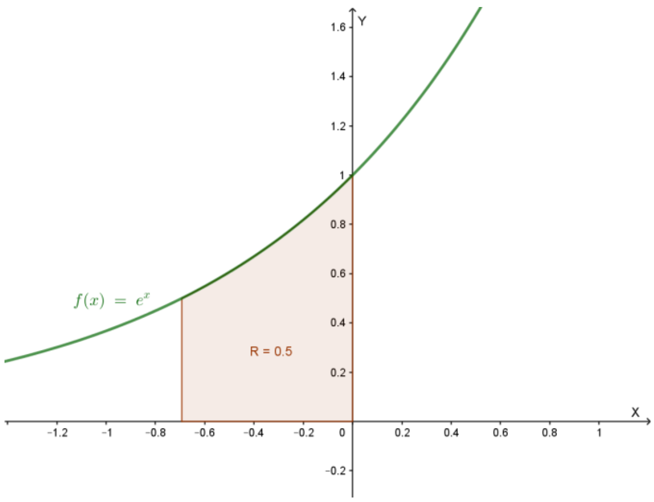
$$a(x) = x^5, \quad b(x) = x^5 - 1\,, \quad c(x) = |x^5 - 1|$$



QUESITO 5

Nel piano riferito a un sistema di coordinate Oxy, si consideri la regione R delimitata dal grafico di $y = e^x$ *, dagli assi cartesiani e dalla retta* $x = ln(1/2)$. *Si calcoli l'area di R.*

Rappresentiamo la regione R:



L'area richiesta è data da :

$$Area(R) = \int_{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}^{0} e^x dx = [e^x]_{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}^{0} = 1 - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\, u^2 = 0.50\, u^2 = Area(R)$$

QUESITO 6

Cosa si intende per periodo di una funzione? Si spieghi il procedimento da seguire per determinare il periodo della funzione: $f(x) = sin(3x+1)$.

Si dice che $y = f(x)$ è periodica di periodo T se T è il più piccolo numero reale positivo tale che

$$f(x+T) = f(x), \qquad \forall x \in I.D.\, di\, f\ e\ x+T \ \in I.D.\, di\, f$$

Si dimostra che se $f(x)$ ha periodo T, la funzione $f(a\,x)$ ha periodo $\frac{T}{a}$.
Quindi, nel nostro caso: $f(x) = \sin(3x+1)$ ha periodo $\frac{2\,\pi}{3}$
$(si\ noti\ che\ sin(x+1)\ ha\ periodo\ 2\,\pi)$

Il periodo della funzione data può essere determinato anche servendosi della definizione. Dobbiamo cercare il più piccolo numero reale positivo T per cui: $f(x+T) = f(x)$. Quindi:

$$f(x+T) = sin(3(x+T)+1) = \sin(3x+3T+1) = \sin(3x+1)\ \ se\ \ 3T = 2\pi\text{: } T = \frac{2}{3}\pi$$

QUESITO 7

Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f: x \mapsto x^2 - x - \ln x$$

La f ha caratteristiche di simmetria? È invertibile? Si tracci il grafico di f .

$f(x) = x^2 - x - \ln x$ ha come campo di esistenza x>0.

Risulta:
$f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-x-1}{x} > 0 \quad se\ \ 2x^2 - x - 1 > 0:\ \ x < -\frac{1}{2}\ \ or\ \ x > 1$. Quindi la funzione è decrescente da 0 a 1 e crescente da 1 in poi e pertanto:

nel suo dominio la funzione NON è invertibile, non essendoci corrispondenza biunivoca fra dominio e codominio.

Per tracciare il grafico della funzione oltre a quanto già detto sul dominio e sulla monotonia, osserviamo quanto segue.

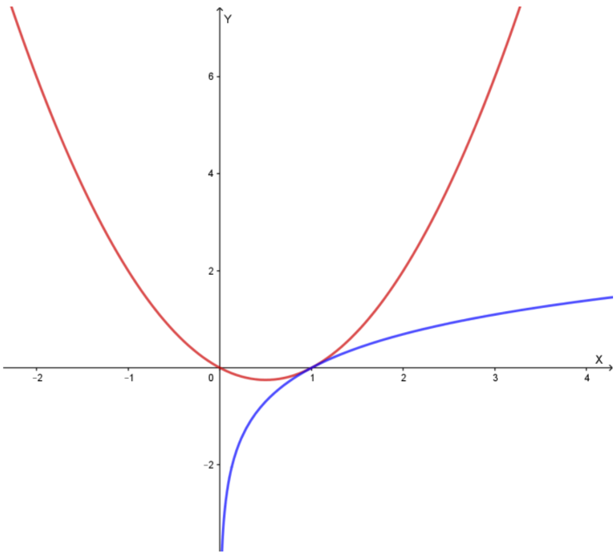
Non ci sono intersezioni con l'asse y.
Intersezioni con l'asse x:

$$x^2 - x - \ln x = 0, \quad x^2 - x = \ln x$$

Rappresentando graficamente le funzioni

$$y_1 = x^2 - x \quad e \quad y_2 = \ln x$$

osserviamo che $x^2 - x = \ln x$ se $x = 1$ ed inoltre $y_1' = 2x - 1,\ quindi\ y_1'(1) = 1;$ $y_2' = \frac{1}{x},\ da\ cui\ y_2'(1) = 1$: le due curve sono quindi tangenti in $x = 1$.



Si può anche notare che:

$x^2 - x \geq \ln x$ per ogni x del dominio, quindi la funzione si annulla per x=1 ed è positiva altrove.

Si ha poi:

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2 - x - \ln x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to +\infty}(x^2 - x - \ln x) = \lim_{x\to +\infty}(x^2) = +\infty; \;\; x = 0 \;\; asintoto\ vert.$$

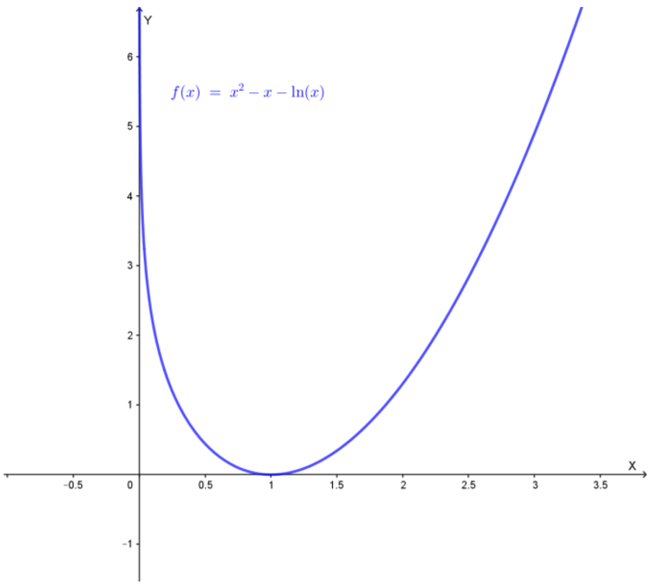
Non c'è asintoto obliquo, perché:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2 - x - \ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(x - 1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

Studiamo infine la derivata seconda:

$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} > 0 \quad sempre$: concavità sempre verso l'alto, nessun flesso.

Il grafico è il seguente:



QUESITO 8

Sia f la funzione polinomiale definita per ogni x reale da $f(x) = x^4 + 5x^2 + 3$ *.*
Allora $f(x^2 - 1)$ *è dato per ogni x da:*

A) $x^4 + 5x^2 + 1$ *;*
B) $x^4 + x^2 - 3$ *;*
C) $x^4 - 5x^2 + 1$ *;*
D) $x^4 + x^2 + 3$ *;*
E) nessuna di queste.

Una sola delle risposte indicate è quella corretta. Si giustifichi la risposta.

Si ha che: $f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^4 + 5(x^2 - 1)^2 + 3 =$

$= (x^4 - 2x^2 + 1)^2 + 5(x^4 - 2x^2 + 1) + 3 =$

$= x^8 + 4x^4 + 1 - 4x^6 + 2x^4 - 4x^2 + 5x^4 - 10x^2 + 5 + 3 = x^8 - 4x^6 + 11x^4 - 14x^2 + 9$

La risposta è quindi la E.

Con la collaborazione di Angela Santamaria