

# ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico

Sessione ordinaria 2010

## SECONDA PROVA SCRITTA

### Tema di Matematica

(AMERICA- emisfero australe)<sup>1</sup>

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

#### Problema 1

Sia  $f$  la funzione di dominio  $I = ]-1/2, +\infty[$  definita da  $f(x) = \ln(1 + 2x)$ .

- Quale è il codominio di  $f$ ? Si dimostri che  $f$  è strettamente crescente su  $I$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .
- Sia  $g(x) = f(x) - x$  con  $x \in I$ ; si studi come varia  $g(x)$  su  $I$ .
- Si dimostri che l'equazione  $g(x) = 0$  ammette due soluzioni: 0 e un'altra, denotata con  $\beta$ , appartenente all'intervallo  $[1, 2]$ . Si dimostri altresì che per tutti gli  $x$  reali dell'intervallo  $J = ]0, \beta[$  anche  $f(x)$  appartiene a  $J$ .
- Si calcoli l'area della parte di piano delimitata dal grafico di  $f$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[0, 2]$ .

#### Problema 2

Il triangolo ABC è equilatero e di lato unitario. La retta  $r$  parallela ad  $\overline{AB}$  interseca il lato  $\overline{AC}$  e il lato  $\overline{BC}$  nel punto P e nel punto Q, rispettivamente.

- Detta  $x$  la distanza di  $r$  dal vertice C si determini per quale valore di  $x$  nel quadrilatero ABQP si può inscrivere una circonferenza; quale è la lunghezza del suo raggio?
- Si esprima in funzione di  $x$  il rapporto fra l'area del triangolo PQC e l'area del quadrilatero ABQP, verificando che si ottiene la funzione:

$$f(x) = \frac{4x^2}{3 - 4x^2}.$$

Il rapporto  $f(x)$  assume tutti i valori reali positivi? Si giustifichi la risposta.

- Si studi la funzione  $f$  senza tener conto dei limiti geometrici del problema e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .
- Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da  $\gamma$  e dalla retta di equazione  $y = 2$ .

---

<sup>1</sup> Testo tratto da [http://www.batmath.it/esame/temi/tutti\\_temi.pdf](http://www.batmath.it/esame/temi/tutti_temi.pdf)

## Questionario

1. Si consideri la regione  $R$  del primo quadrante del sistema di riferimento  $Oxy$ , delimitata dal grafico di  $y = e^{-x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = \ln 3$ .  $R$  è la base di un solido  $W$  che, tagliato con piani perpendicolari all'asse  $x$ , dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di  $W$ .
2. Si discuta l'equazione

$$(m-1)x^2 - (m-5)x + m-1 = 0 \quad \text{con} \quad -2 \leq x \leq -1.$$

3. Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad un cilindro dato.
4. Si determini il punto della parabola

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

più vicino al punto di coordinate  $(6, 3)$ .

5. Sia  $\overline{AB}$  un segmento di lunghezza 10 cm. Si determini il luogo dei punti  $C$  dello spazio tali che  $\widehat{ABC}$  sia retto e  $\widehat{BAC}$  misuri  $60^\circ$ .
6. Due località  $A$  e  $B$  hanno la stessa longitudine;  $A$  ha latitudine  $43^\circ 36' N$  mentre la latitudine di  $B$  è  $36^\circ 43' N$ . Quanto misura in linea d'aria la distanza tra  $A$  e  $B$ ? (Raggio medio della terra: 6400 km).
7. Si dimostri che una funzione  $f(x)$  derivabile in un punto  $x_0$  è ivi anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.
8. Si dica se

$$f(x) = \sin(x - \pi) + \cos(3x)$$

è una funzione periodica ed in caso affermativo se ne determini il periodo.