Scuole italiane all'estero (America latina) 2010

PROBLEMA 1

Sia f la funzione di dominio $I = \left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ *definita da* $f(x) = ln(1+2x)$.

a)

Quale è il codominio di f *? Si dimostri che* f *è strettamente crescente su* I *e se ne tracci il grafico* γ *.*

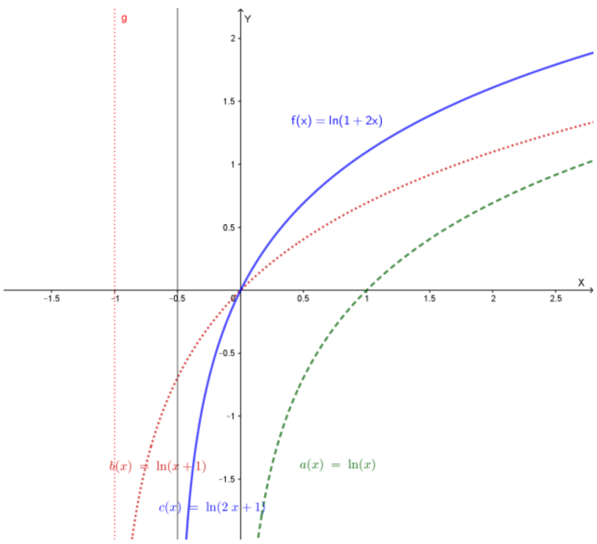
Dominio: $1 + 2x > 0$, $x > -\frac{1}{2}$: $I = \left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$
Codominio: la funzione è continua in tutto il suo dominio e risulta:

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} ln(1+2x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(1+2x) = +\infty$$

Quindi il codominio è: $]-\infty; +\infty[= R$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione: $f'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0$ $su\ tutto\ I$: la funzione è quindi strettamente crescente *su* I *.*
Si può anche verificare direttamente che, per ogni $x_1 < x_2$ del dominio si ha $2x_1 < 2x_2$, $1 + 2x_1 < 1 + 2x_2, \ln(1 + 2x_1) < \ln(1 + 2x_2)$.

Il grafico della funzione si può facilmente ottenere dal grafico di $y = \ln x$ mediante una traslazione di vettore $(-1; 0)$ ed una dilatazione verticale di fattore 2:

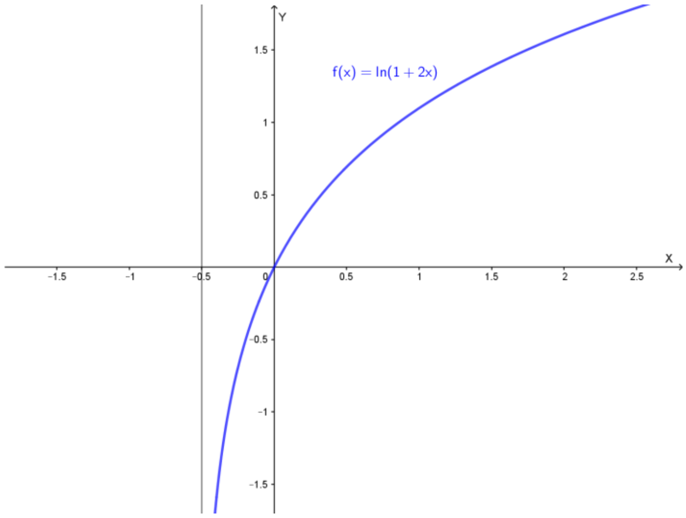


Allo stesso risultato si può arrivare con uno studio diretto della funzione.
Abbiamo già calcolato i limiti e studiato la monotonia. Manca lo studio della derivata seconda:

$f''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2} < 0\ in\ tutto\ il\ dominio$: concavità sempre verso il basso.
Osserviamo che non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ essendo:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 0$ (x è infinito di ordine superiore rispetto a $ln(1+2x)$)

C'è l'asintoto verticale $x = -\frac{1}{2}$.
Inoltre il grafico taglia l'asse x quando $\ln(1+2x) = 0, 1+2x = 1, x = 0$:



b)

Sia $g(x) = f(x) - x$ *con* $x \in I$*; si studi come varia* $g(x)$ *su* I .

Risulta: $g(x) = f(x) - x = \ln(1+2x) - x$
Il dominio è quello di f. L'asse x viene ancora intersecato nell'origine degli assi (infatti risulta $g(0) = f(0) - 0 = 0$), e anche g, come f, ha l'asintoto verticale $x = -\frac{1}{2}$. Inoltre il grafico di g(x) interseca l'asse x in un altro punto (come richiesto nel punto c). Risulta poi:

$\lim_{x\to+\infty} (\ln(1+2x) - x) = -\infty$, perché $-x$ è infinito di ordine superiore rispetto a $\ln(1+2x)$
Vediamo se c'è asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2x) - x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln(1+2x)}{x} - 1\right] = -1 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(1+2x) - x + x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(1+2x)) = +\infty$$

Non c'è quindi asintoto obliquo.

Studiamo la derivata prima:

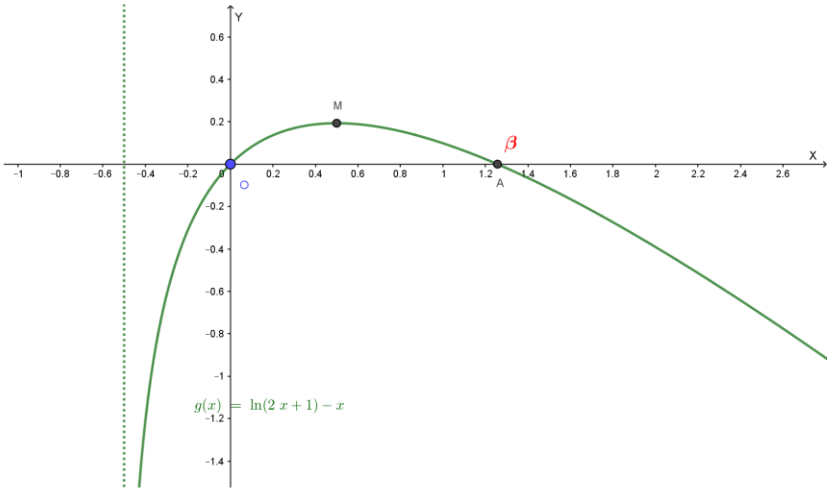
$g'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{1-2x}{1+2x} > 0 \;\; per \; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$: la funzione è crescente in tale intervallo e decrescente per $x > \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{2}$ è punto di massimo relativo (e assoluto), con ordinata:

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) - \frac{1}{2} \cong 0.2$.

Studiamo la derivata seconda:

$g''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2} < 0 \;\; per \; ogni \; x \; del \; dominio$: concavità sempre verso il basso, non ci sono flessi.

Grafico:



c)

Si dimostri che l'equazione $g(x) = 0$ ammette due soluzioni: 0 e un'altra, denotata con β , appartenente all'intervallo $[1, 2]$. Si dimostri altresì che per tutti gli x reali dell'intervallo $J =]0; \beta[$ anche $f(x)$ appartiene a J .

Essendo $\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} g(x) = -\infty$ e g crescente per $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, in tale intervallo $g(x) = 0$ solo per $x = 0$. Per $x = \frac{1}{2}$ la funzione è positiva e per $x > \frac{1}{2}$ è decrescente; siccome $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, per $x > \frac{1}{2}$ risulta $g(x) = 0$ in uno ed un solo valore.

Risulta poi:
$g(1) = \ln(3) - 1 > 0 \;\; e \;\; g(2) = \ln(5) - 2 < 0$: quindi risulta $1 < \beta < 2$.

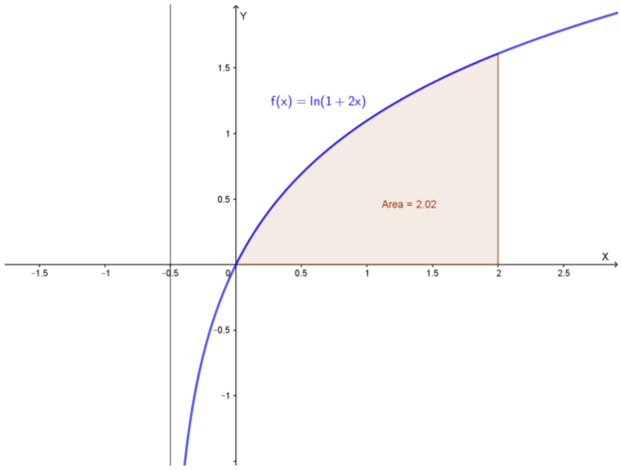
Dobbiamo infine dimostrare che se $0 < x < \beta$ allora $0 < f(x) < \beta$. Ricordiamo che:
$f(x) = ln(1+2x) \quad e \quad g(x) = f(x) - x$
Risulta quindi: $f(0) = 0 \quad e \quad f(\beta) = g(\beta) + \beta = 0 + \beta = \beta$
Essendo f sempre crescente, se $0 < x < \beta$ allora $f(0) < f(x) < f(\beta)$ cioè:

$$0 < f(x) < \beta\ .$$

d)

Si calcoli l'area della parte di piano delimitata dal grafico di f e dall'asse x sull'intervallo $[0, 2]$.

Rappresentiamo la regione di cui si chiede l'area:



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^2 \ln(1+2x)\,dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\ln(1+2x)$ integrando per parti:

$$\int \ln(1+2x)\,dx = \int 1\cdot\ln(1+2x)\,dx = \int (x)'\cdot\ln(1+2x)\,dx = x\ln(1+2x) -$$

$$-\int x\cdot\frac{2}{1+2x}\,dx = x\ln(1+2x) - \int\frac{2x}{2x+1}\,dx = x\ln(1+2x) - \int\frac{2x+1-1}{2x+1}\,dx =$$

$$= x\ln(1+2x) - \int\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)dx = x\ln(1+2x) - \int dx + \int\frac{1}{2x+1}\,dx =$$

$= x\ln(1+2x) - x + \frac{1}{2}\ln(2x+1) + K$. Quindi:

$$Area = \int_0^2 \ln(1+2x)\,dx = \left[x\ln(1+2x) - x + \frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^2 = 2\ln(5) - 2 + \frac{1}{2}\ln(5) =$$

$$= \left(\frac{5}{2}\ln(5) - 2\right)\ u^2 \cong 2.02\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria