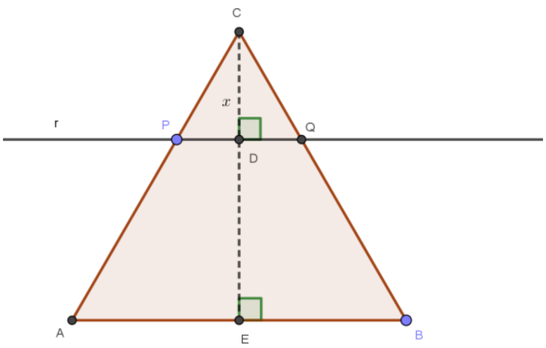
Scuole italiane all'estero (America latina) 2010

PROBLEMA 2

Il triangolo ABC è equilatero e di lato unitario. La retta r parallela ad AB interseca il lato AC e il lato BC nel punto P e nel punto Q, rispettivamente.

a)

Detta x la distanza di r dal vertice C si determini per quale valore di x nel quadrilatero ABQP si può inscrivere una circonferenza; quale è la lunghezza del suo raggio?



Affinché nel quadrilatero ABQP si possa inscrivere una circonferenza è necessario che:

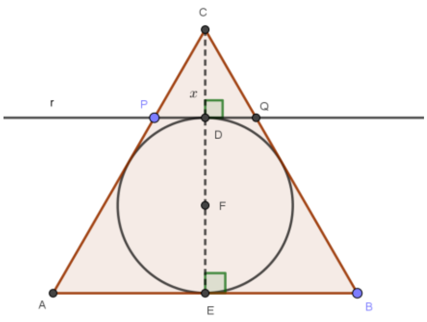
$$AB + PQ = AP + BQ \ , \quad limiti: \quad 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (*)$$

Il triangolo PQC è anch'esso equilatero e risulta:

$PD = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $PC = 2PD = \frac{2x}{\sqrt{3}}$, $AP = BQ = 1 - \frac{2x}{\sqrt{3}}$, $PQ = 2PD = \frac{2x}{\sqrt{3}}$. Sostituendo nella (*):

$1 + \frac{2x}{\sqrt{3}} = 2\left(1 - \frac{2x}{\sqrt{3}}\right)$; $\frac{6x}{\sqrt{3}} = 1$; $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

\



Osservando la figura precedente si ha che il raggio R della circonferenza inscritta è:

$$R = DF = \frac{DE}{2} = \frac{CE - x}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} = R$$

Ovviamente la circonferenza inscritta nel quadrilatero ABQP è anche inscritta nel triangolo ABC.
Notiamo che $R = x,$ quindi $R = \frac{1}{3}CE$: il centro F della circonferenza coincide quindi con il baricentro del triangolo ABC, che è anche l'incentro (ABC equilatero) e perciò la circonferenza inscritta nel quadrilatero ABQP è anche inscritta nel triangolo ABC, come detto sopra.

b)

Si esprima in funzione di x il rapporto fra l'area del triangolo PQC e l'area del quadrilatero ABQP, verificando che si ottiene la funzione:

$$f(x) = \frac{4x^2}{3 - 4x^2}\ .$$

Il rapporto $f(x)$ *assume tutti i valori reali positivi? Si giustifichi la risposta.*

$$Area(PQC) = \frac{1}{2}PQ \cdot CD = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)x = \frac{x^2}{\sqrt{3}}$$

$$Area(ABQP) = \frac{1}{2}(AB + PQ)DE = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)$$

Quindi:

$$f(x) = \frac{Area(PQC)}{Area(ABQP)} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)} = \frac{4x^2}{(\sqrt{3} + 2x)(\sqrt{3} - 2x)} = \frac{4x^2}{3 - 4x^2} = f(x)$$

Verifichiamo se $f(x)$ assume tutti i valori reali positivi.

Quando $x = 0$ risulta $Area(PQC) = 0\ e\ Area(ABQP) = Area(ABC)$, quindi $f(x) = 0$.
Al crescere di x da 0 al suo massimo, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $Area(ABQP)$ decresce fino ad annullarsi e $Area(PQC)$ tende all'area di ABC, quindi il rapporto tende (con continuità) a $+\infty$.

Pertanto:

possiamo affermare che $f(x)$ assume tutti i valori reali positivi.

c)

Si studi la funzione f senza tener conto dei limiti geometrici del problema e se ne tracci il grafico γ.

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{4x^2}{3-4x^2}}$$

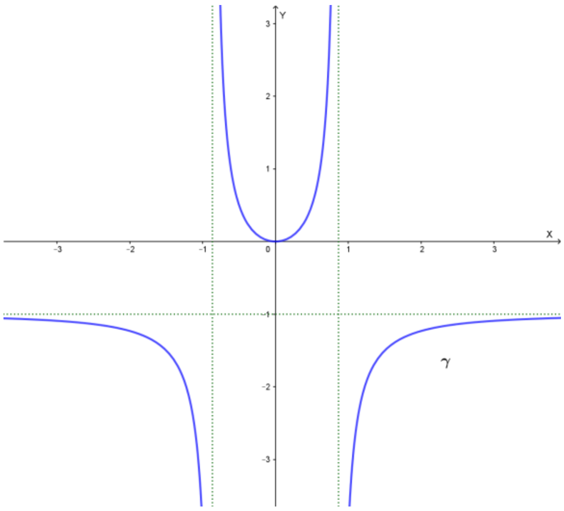
Dominio: $3-4x^2 \neq 0,\ x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}:\quad -\infty < x < -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{2} < x < +\infty$
Essendo $f(-x) = f(x)$ la funzione è pari (grafico simmetrico rispetto all'asse y).
Se $x = 0$ $y = 0$ e se $y = 0$ $x = 0$.
La funzione è positiva quando $3-4x^2 > 0,\ \ 4x^2-3 < 0:\quad -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < +\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Limiti:
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$ (asintoto orizzontale $y = -1$ per $x \to \pm\infty$).
$\lim_{x\to\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\pm}} f(x) = \mp\infty = \lim_{x\to\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\mp}} f(x)$ $\left(x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$ asintoti verticali).

Studio derivata prima:
$f'(x) = \frac{8x(3-4x^2)-4x^2(-8x)}{(3-4x^2)^2} = \frac{24x}{(3-4x^2)^2} \geq 0\ \ se\ \ x \geq 0$: la funzione (nel dominio) è crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$; $x = 0\ punto\ di\ minimo\ relativo$.

Studio derivata seconda:
$$f''(x) = \frac{24(3-4x^2)^2 - 24x[2(3-4x^2)(-8x)]}{(3-4x^2)^4} = \frac{24(3-4x^2)(3-4x^2+16x^2)}{(3-4x^2)^4} =$$
$= \frac{24(3-4x^2)(3+12x^2)}{(3-4x^2)^4} \geq 0\ \ se\ \ 3-4x^2 > 0: quindi$ il grafico volge la concavità verso l'alto dove la funzione è positiva e verso il basso dove è negativa; non ci sono flessi.

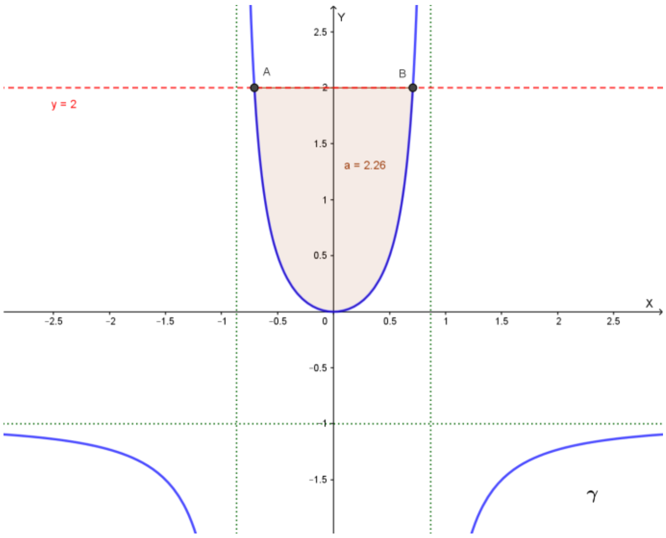
Grafico:



d)

Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da γ *e dalla retta di equazione* $y = 2$.

Rappresentiamo la regione richiesta:



Cerchiamo le intersezioni A e B fra la retta $y = 2$ e la curva γ :

$\frac{4x^2}{3-4x^2} = 2,\quad 4x^2 = 6 - 8x^2\,,\quad 2x^2 = 1\,,\quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Per la simmetria della regione si ha:

$$Area = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2 - \frac{4x^2}{3-4x^2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{6-12x^2}{3-4x^2}\right)dx = 6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{2-4x^2}{3-4x^2}\right)dx =$$

$$= 6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{3-4x^2-1}{3-4x^2}\right)dx = 6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx - 6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{3-4x^2}\right)dx$$

Calcoliamo $\int\left(\frac{1}{3-4x^2}\right)dx$;

$$\frac{1}{3-4x^2} = \frac{a}{\sqrt{3}-2x} + \frac{b}{\sqrt{3}+2x} = \frac{a\left(\sqrt{3}+2x\right) + b\left(\sqrt{3}-2x\right)}{3-4x^2} = \frac{2x(a-b) + \sqrt{3}(a+b)}{3-4x^2}$$

Quindi deve essere, per ogni x del dominio, $2x(a-b) + \sqrt{3}(a+b) = 1$:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ \sqrt{3}(a+b) = 1 \end{cases};\quad \begin{cases} a = b \\ 2a\sqrt{3} = 1 \end{cases};\quad \begin{cases} a = \frac{\sqrt{3}}{6} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Perciò:

$$\int\left(\frac{1}{3-4x^2}\right)dx=\int\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{3}-2x}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{3}+2x}\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{6}\int\left(\frac{1}{\sqrt{3}-2x}\right)dx+\frac{\sqrt{3}}{6}\int\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2x}\right)dx$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{12}\int\left(\frac{-2}{\sqrt{3}-2x}\right)dx+\frac{\sqrt{3}}{12}\int\left(\frac{2}{\sqrt{3}+2x}\right)dx=-\frac{\sqrt{3}}{12}ln\left|\sqrt{3}-2x\right|+\frac{\sqrt{3}}{12}ln\left|\sqrt{3}+2x\right|+c=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}ln\left|\frac{\sqrt{3}+2x}{\sqrt{3}-2x}\right|+c$$

Quindi:

$$Area=\ldots=6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx-6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{3-4x^2}\right)dx=6[x]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-6\left[\frac{\sqrt{3}}{12}ln\left|\frac{\sqrt{3}+2x}{\sqrt{3}-2x}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\left(3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)\right)u^2=\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right)\cong 2.26\ u^2=Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria