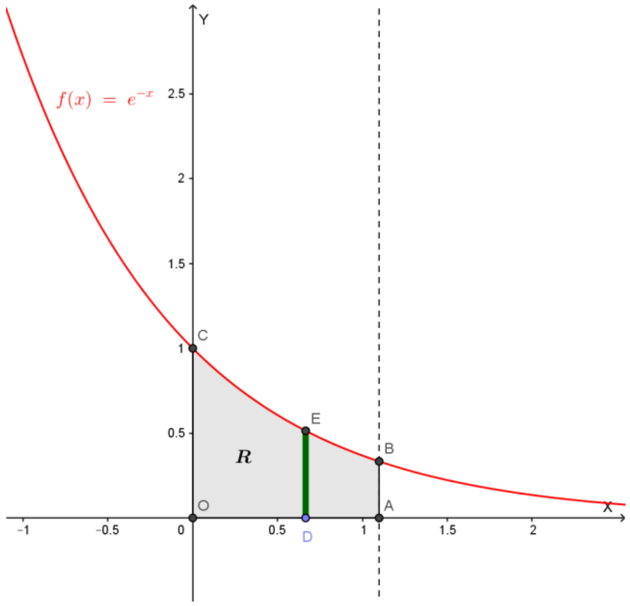
Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2010 – Quesiti

QUESITO 1

Si consideri la regione R del primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, delimitata dal grafico di $y = e^{-x}$, dall'asse x e dalla retta $x = \ln 3$. R è la base di un solido W che, tagliato con piani perpendicolari all'asse x, dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di W.

Rappresentiamo la regione R:



La sezione quadrata ha per lato $DE = f(x)$, e la sua area $A(x)$ è quindi $f^2(x) = e^{-2x}$.

Il volume $V(W)$ è quindi dato da:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_0^{\ln(3)} e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln(3)} = -\frac{1}{2}\left[e^{-2\ln(3)} - 1\right] = -\frac{1}{2}\left[\left(e^{\ln(3)}\right)^{-2} - 1\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}(3^{-2} - 1) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - 1\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{4}{9} \cong 0.444\ u^3$$

Quindi: $V(W) = \frac{4}{9}\ u^3 \cong 0.444\ u^3$

QUESITO 2

Si discuta l'equazione:

$$(m-1)x^2-(m-5)x+m-1=0 \quad con \quad -2 \le x \le -1 \ .$$

Il quesito richiama il metodo di **Tartinville**, molto meccanico ed oramai desueto, che preferiamo non utilizzare.

Metodo algebrico diretto

Se m=1 si ha x=0 che non appartiene a [-2; -1].
L'equazione ammette radici se $\Delta \ge 0$, quindi: $(m-5)^2-4(m-1)^2 \ge 0$,

$$21-2m-3m^2 \ge 0\ , \quad 3m^2+2m-21 \le 0\ , \qquad -3 \le m \le \frac{7}{3}$$

Le radici dell'equazione sono: $x=\frac{m-5\pm\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)}$. Deve quindi essere:

$$\begin{cases} \frac{m-5-\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \ge -2 \\ \frac{m-5-\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \le -1 \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases} \quad \text{vel} \quad \begin{cases} \frac{m-5+\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \ge -2 \\ \frac{m-5+\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \le -1 \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases}$$

Questi due sistemi equivalgono a:

$$1)\begin{cases} \frac{5m-9-\sqrt{21-2m-3m^2}}{(m-1)} \ge 0 \\ \frac{3m-7-\sqrt{21-2m-3m^2}}{(m-1)} \le 0 \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases} \quad \text{vel} \quad 2)\begin{cases} \frac{5m-9+\sqrt{21-2m-3m^2}}{(m-1)} \ge 0 \\ \frac{3m-7+\sqrt{21-2m-3m^2}}{(m-1)} \le 0 \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} -3 \le m < 1,\ \ \frac{15}{7} \le m \le \frac{7}{3} \\ 1 < m \le \frac{7}{3} \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases} \quad : \quad \frac{15}{7} \le m \le \frac{7}{3}$$

$$2)\begin{cases} -3 \le m < 1,\ \ 1 < m \le \frac{7}{3} \\ m=\frac{7}{3} \\ -3 \le m \le \frac{7}{3} \end{cases} \quad : \quad m=\frac{7}{3}$$

Le radici dell'equazione appartengono all'intervallo $[-2;\ -1]$ se $\frac{15}{7} \leq m \leq \frac{7}{3}$.

Metodo grafico

L'equazione può essere scritta nella forma:

$$mx^2 - x^2 - mx + 5x + m - 1 = 0\,, \quad m(x^2 - x + 1) = x^2 - 5x + 1\ , \quad m = \frac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$$

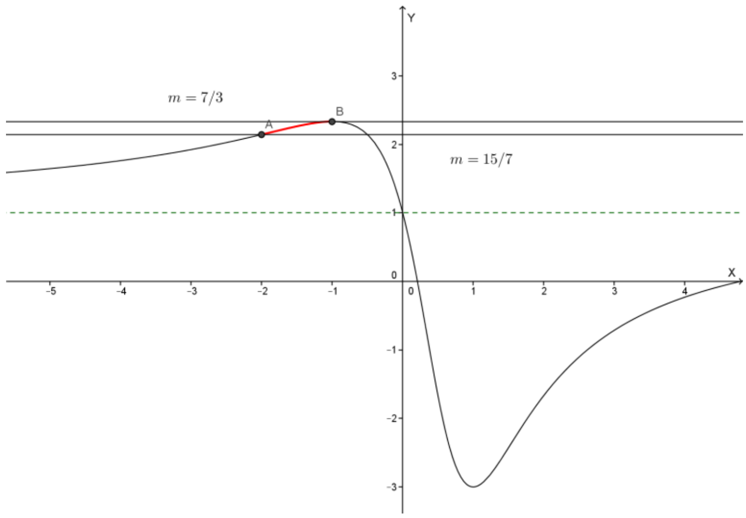
Quindi dobbiamo risolvere graficamente il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1} \\ y = m \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

Studiamo sommariamente la funzione. Essa è definita, continua e derivabile su tutto R. I limiti all'infinito sono uguali a 1 (quindi y=1 è asintoto orizzontale). È sufficiente studiare la derivata prima per uno studio qualitativo della funzione.

$$y' = \frac{4(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2} = 0 \quad per\ x = \pm 1\,, \qquad y' > 0 \quad per\ x < -1\ \ vel\ \ x > 1$$

La funzione quindi è crescente per $x < -1\ \ vel\ \ x > 1$ e decrescente per $-1 < x < 1$. Abbiamo un massimo (assoluto) in $x = -1$, che vale $f(-1) = \frac{7}{3}$ ed un minimo (assoluto) in $x = 1$, che vale $f(1) = -3$.
Abbiamo la seguente situazione grafica (A e B sono i punti di ascissa -2 e -1):



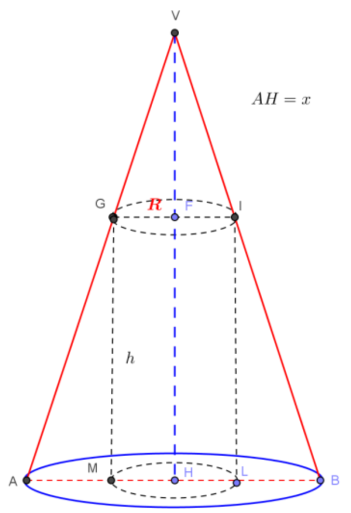
Essendo $f(-2) = \frac{15}{7}\ \ ed\ \ f(-1) = \frac{7}{3}$ possiamo concludere che le radici dell'equazione appartengono all'intervallo [-2; -1] se $\frac{15}{7} \leq m \leq \frac{7}{3}$.

QUESITO 3

Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad un cilindro dato.

Siano R ed h il raggio e l'altezza del cilindro dato. Indichiamo con x il raggio di base del cono (x>R). Detti AH e VH il raggio e l'altezza del cono risulta:

$$V(cono) = \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot VH = \frac{1}{3}\pi\, x^2 \cdot VH$$



Troviamo VH in funzione di x osservando che i triangoli AHV e AMG sono simili:

$$AH{:}AM = VH{:}GM\ , \quad x{:}(x-R) = VH{:}h, \quad VH = \frac{hx}{x-R}$$

Quindi:

$$V(cono) = \frac{1}{3}\pi\, x^2 \cdot VH = \frac{1}{3}\pi\, x^2 \cdot \frac{hx}{x-R} = \frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{x^3}{x-R}$$

Tale volume è massimo se lo è:

$$y = \frac{x^3}{x-R}, \quad con\ \ x > R$$

Utilizziamo il metodo delle derivate:

$$y' = \frac{3x^2(x-R) - x^3(1)}{(x-R)^2} = \frac{2x^3 - 3Rx^2}{(x-R)^2} \geq 0\ \ se\ \ x^2(2x-3R) \geq 0,\ \ x \geq \frac{3}{2}R$$

La funzione è crescente se $x > \frac{3}{2}R$ e decrescente se $R < x < \frac{3}{2}R$: essa è quindi minima se $x = \frac{3}{2}R$; risulta: $VH = \frac{hx}{x-R} = VH = \frac{\frac{3}{2}Rh}{\frac{R}{2}} = 3h$.

Il cono di volume minimo circoscritto ad un cilindro dato è quindi quello che ha come raggio di base i $\frac{3}{2}$ del raggio del cilindro dato e altezza tripla dell'altezza del cilindro dato.

QUESITO 4

Si determini il punto della parabola $y = \frac{1}{4}x^2$ più vicino al punto di coordinate (6; 3).

Indichiamo con $P = (x; y) = \left(x; \frac{1}{4}x^2\right)$ il generico punto della parabola e calcoliamo la distanza da punto dato $A = (6; 3)$.

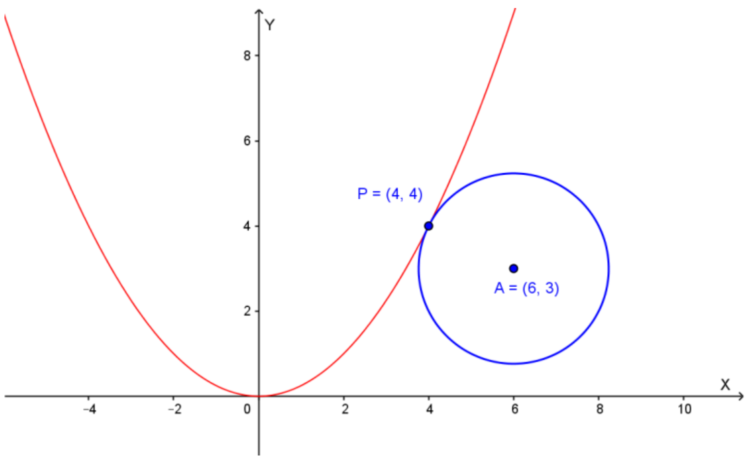
$$PA = \sqrt{(x-6)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - 3\right)^2}$$

Tale distanza è minima se lo è il suo quadrato $z = \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} - 12x + 45$. Risulta:

$z' = \frac{1}{4}x^3 - x - 12 \geq 0 \quad se \quad x^3 - 4x - 48 \geq 0$ da cui, abbassando di grado con la regola di Ruffini, si ha:

$(x-4)(x^2+4x+12) \geq 0$ ed essendo $(x^2+4x+12) \geq 0 \quad \forall x$ poiché il delta è negativo, si ha che:
$z' \geq 0 \quad quando \quad x \geq 4$: pertanto z cresce per $x > 4$ e decresce per $x < 4$:
per $x = 4$ la distanza richiesta risulta minima.

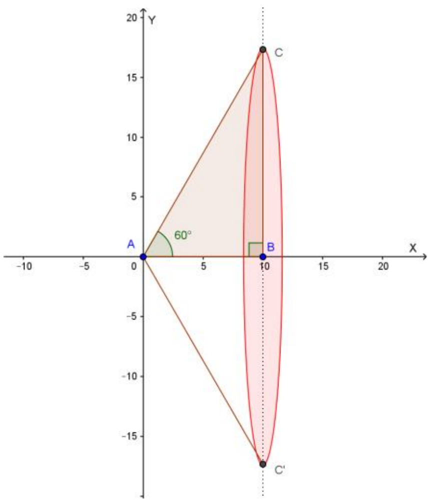
Il punto della parabola più vicino ad A è quindi il punto di coordinate $(4; 4)$.



QUESITO 5

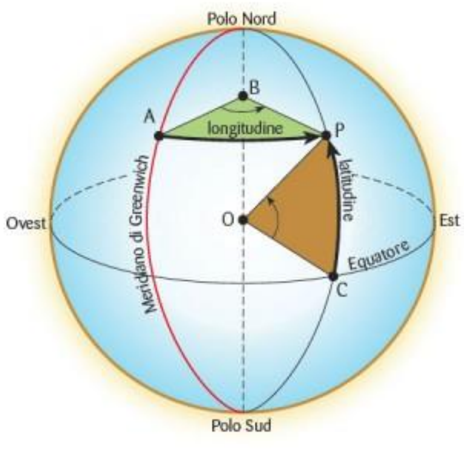
Sia AB un segmento di lunghezza 10 cm. Si determini il luogo dei punti C dello spazio tali che $A\hat{B}C$ sia retto e $B\hat{A}C$ misuri 60°.

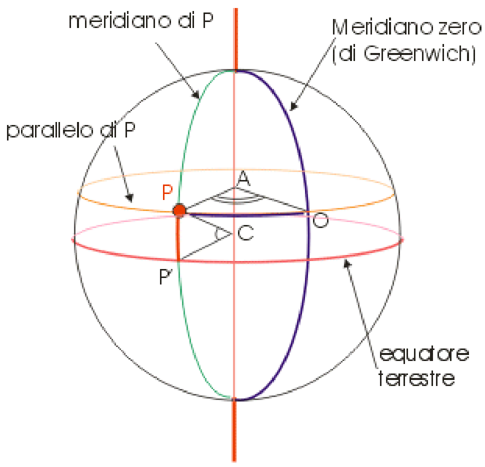
Costruiamo il triangolo ABC nel piano cartesiano ponendo A=(0;0) e B=(10;0) e determiniamo C con le condizioni date. Risulta: $BC = 10\sqrt{3}$. I punti C dello spazio che soddisfano le condizioni richieste appartengono alla circonferenza di raggio BC e centro B, come si può osservare nella figura seguente:



QUESITO 6

Due località A e B hanno la stessa longitudine; A ha latitudine $43°36'\ N$ mentre la latitudine di B è $36°43'\ N$. Quanto misura in linea d'aria la distanza tra A e B? (Raggio medio della terra: $6400\ km$).





Ricordiamo alcune definizioni.

Dato un punto P della superficie terrestre si considerino il parallelo ed il meridiano passanti per esso; indichiamo con P' l'intersezione tra il meridiano per P e l'equatore; l'angolo PCP', essendo C il centro della sfera, è definito LATITUDINE e varia da O° a 90° se P è nell'emisfero Nord, da -90° a O° se P è nell'emisfero Sud.
Indichiamo con O l'intersezione tra il parallelo per P ed il meridiano fondamentale (Greenwich) e sia A l'intersezione tra il piano del parallelo per P e l'asse di rotazione: l'angolo PAO è definito LONGITUDINE e varia da 0° a 180° a EST del meridiano fondamentale, da -180° a 0° a Ovest del meridiano fondamentale.
La LATITIDINE λ e la LONGITUDINE φ definiscono un sistema di coordinate geografiche terrestri.

Considerando A e B sullo stesso meridiano, nel nostro caso abbiamo un arco AB di circonferenza di ampiezza α pari alla differenza delle latitudini, centro nel centro della Terra e raggio uguale al raggio terrestre:

$$\alpha = 43°36' - 36°43' = 6°53' = \left(6 + \frac{53}{60}\right)° \cong 6.883° = 0.120\, rad$$

Essendo:

$$\alpha = \frac{l}{R}\,, \qquad l = \alpha\, R = 0.120 \cdot 6400\, km = 768\, km$$

La distanza tra A e B in linea d'aria misura circa $768\, km$.

QUESITO 7

Si dimostri che una funzione $f(x)$ derivabile in un punto x_0 è ivi anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.

Se $f(x)$ è derivabile in x_0 esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Per dimostrare che la funzione è continua nello stesso punto è sufficiente dimostrare che:

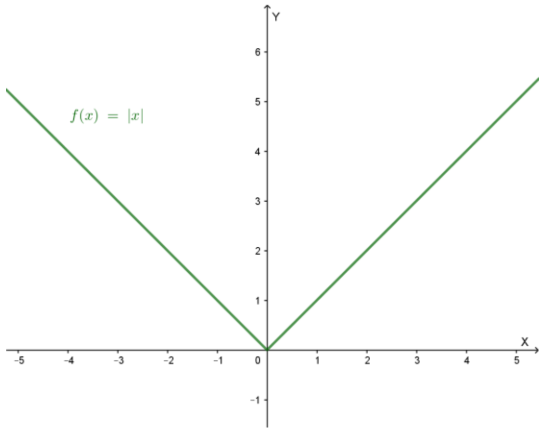
$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0), \qquad equivalente\ a: \qquad \lim_{h\to 0}\big(f(x_0 + h) - f(x_0)\big) = 0$$

Risulta:

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x_0 + h) - f(x_0)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h = \lim_{h\to 0} f'(x_0) \cdot h = 0\,, \qquad c.v.d.$$

Un semplice esempio di funzione continua in un punto $(x_0 = 0)$ e ivi non derivabile è:

$$f(x) = |x|$$



QUESITO 8

Si dica se $f(x) = \sin(x - \pi) + \cos(3x)$ *è una funzione periodica ed in caso affermativo se ne determini il periodo.*

Ricordiamo che una funzione f(x) si dice periodica di periodo T se T è il più piccolo numero reale positivo tale che, per ogni x del suo dominio, risulti f(x)=f(x+T).
La somma di due funzioni periodiche è una funzione periodica (se il rapporto fra i periodi è razionale) ed il suo periodo è uguale al minimo comune multiplo dei periodi delle due funzioni che la costituiscono
Se la funzione $g(x)$ è periodica di periodo T, $g(kx)$ è periodica con periodo $T' = \frac{T}{k}$.

Nel nostro caso la funzione $sin(x - \pi) = -sin\, x$ ha periodo $T = 2\pi = 3\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; la funzione $\cos x$ ha periodo $T = 2\pi$ quindi $cos\,(3x)$ ha periodo $\mathrm{T}'' = \frac{2\pi}{3}$ e $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}''} = 3 \in Q$.
Il m.c.m. fra i due periodi è $3\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi$. Perciò:

La funzione $f(x) = sin(x - \pi) + cos(3x)$ è una funzione periodica ed il suo periodo è 2π.

Con la collaborazione di Angela Santamaria