ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico

Sessione suppletiva 2010

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

(AMERICA- emisfero australe)[1]

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un sistema di riferimento cartesiano $\mathsf{O}xy$, si consideri la parabola λ di equazione $y = kx^2$, dove $k > 0$.

a) Sia P un punto di λ del I quadrante e siano A e B le proiezioni di P rispettivamente sugli assi x e y. Si considerino le due regioni in cui λ divide il rettangolo OAPB e se ne calcolino le rispettive aree.

b) Le due regioni di cui al punto precedente, ruotando intorno all'asse x, generano due solidi. Quale è il rapporto dei loro volumi?

c) Sia S la regione compresa tra λ e la retta r di equazione $y = 3$. Si determini k in modo la massima area tra quelle dei rettangoli aventi un lato su r e inscritti in S sia uguale a 8.

d) Si dimostri che le rette tangenti a λ condotte da un punto qualsiasi della retta $y = -1/(4k)$ sono tra loro perpendicolari.

Problema 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani $\mathsf{O}xy$:

a) si disegni la curva Γ di equazione

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

e, in particolare, si dica se ammette estremi relativi o flessi.

b) Si scriva l'equazione della retta t tangente alla curva Γ nel suo punto di ascissa 8 e si determinino le coordinate dell'ulteriore punto in cui t incontra Γ.

c) Si consideri il fascio di circonferenze tangenti nell'origine all'asse x e tra esse si determini quella che incontra Γ in due punti A e B diametralmente opposti. Si denoti con Λ tale circonferenza.

d) Si calcoli l'area delle tre parti in cui il cerchio, di cui Λ è la circonferenza, è suddiviso dagli archi OA e OB di Γ.

Questionario

1. Sia $n > 0$. Si dimostri che è
$$n! \geq 2^{n-1}.$$

2. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio r, qual è quello di superficie laterale massima?

3. Si determini il punto della parabola $y = 2x^2$ più vicino al punto di coordinate $(-2,-2)$.

4. Si discuta l'equazione
$$x^2 - (k-1)x + 2 = 0 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 2.$$

---

[1] Testo tratto da http://www.batmath.it/esame/temi/tutti_temi.pdf

5. Si dica, giustificando la risposta, se sono esatte le uguaglianze seguenti:

$$\arcsin\big(\sin(-0.3)\big)=-0.3; \qquad \arccos\big(\cos(-0.3)\big)=-0.3;$$
$$\sin\big(\arcsin(-0.3)\big)=-0.3; \qquad \cos\big(\arccos(-0.3)\big)=-0.3.$$

6. Si determini il periodo della funzione

$$f(x)=\cos(3x)-2\sin(2x)-2\tan\frac{x}{2}.$$

7. Si determini l'equazione della normale alla curva $y=\mathrm{e}^x$ nel suo punto di ascissa $x=\ln 3$.

8. Si calcoli

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!}\binom{n}{k}\right].$$