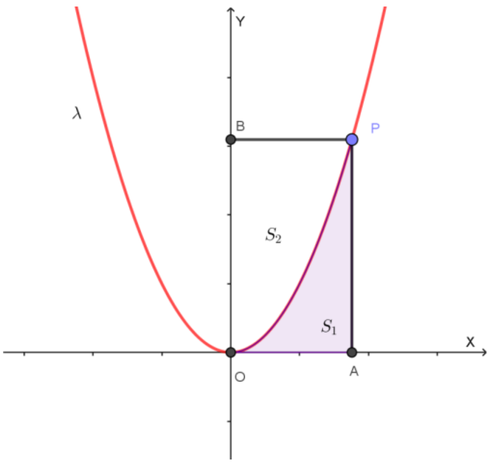
Scuole italiane all'estero (America latina suppletiva) 2010

PROBLEMA 1

In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, si consideri la parabola λ di equazione $y = kx^2$, dove $k > 0$.

a)

Sia P un punto di λ del I quadrante e siano A e B le proiezioni di P rispettivamente sugli assi x e y. Si considerino le due regioni in cui λ divide il rettangolo OAPB e se ne calcolino le rispettive aree.



$P = (t, kt^2),\ \ t > 0$

$$Area(S_1) = \int_0^t kx^2\,dx = k\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t = \frac{1}{3}kt^3\ ,$$

$$Area(S_2) = Area(OAPB) - Area(S_1) = t\cdot kt^2 - \frac{1}{3}kt^3 = \frac{2}{3}kt^3$$

b)

Le due regioni di cui al punto precedente, ruotando intorno all'asse x, generano due solidi. Quale è il rapporto dei loro volumi?

Il volume generato da S_1 è:

$$V_1 = \pi\int_0^t (kx^2)^2\,dx = k^2\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^t = \frac{1}{5}k^2\pi t^5$$

Il volume generato da S_2 si può ottenere sottraendo al cilindro generato dalla rotazione del rettangolo OAPB il volume V_1; quindi:

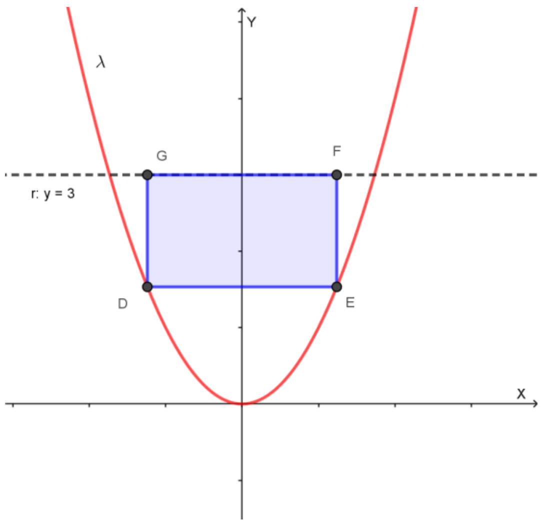
$$V_2 = \pi \cdot AP^2 \cdot OA - \frac{1}{5}k^2\pi t^5 = \pi(kt^2)^2 \cdot t - \frac{1}{5}k^2\pi t^5 = \pi k^2 t^5 - \frac{1}{5}k^2\pi t^5 = \frac{4}{5}k^2\pi t^5$$

Il fra i volumi è:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{5}k^2\pi t^5}{\frac{4}{5}k^2\pi t^5} = \frac{1}{4}$$

c)

Sia S la regione compresa tra λ e la retta r di equazione $y = 3$. Si determini k in modo che la massima area tra quelle dei rettangoli aventi un lato su r e inscritti in S sia uguale a 8.



Posto $E = (t; kt^2),\ con\ t \geq 0\ e\ \ kt^2 \leq 3:\ -\sqrt{\frac{3}{k}} \leq\ t \leq \sqrt{\frac{3}{k}}\ \ ,\ quindi:\ 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{3}{k}}$

L'area del rettangolo DEFG è:

$$Area(DEFG) = DE \cdot EF = 2t(3 - kt^2) = 6t - 2kt^3$$

Cerchiamo il massimo della funzione $y = 6t - 2kt^3\ ,\ con\ \ 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{3}{k}}$

$y' = 6 - 6kt^2 \geq 0\ \ se\ \ t^2 \leq \frac{1}{k}\ ,\ \ 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{1}{k}}$; la funzione è quindi crescente per

$0 \le t < \sqrt{\frac{1}{k}}$ e decrescente per $\sqrt{\frac{1}{k}} < t \le \sqrt{\frac{3}{k}}$: quindi il rettangolo ha area massima per

$t = \sqrt{\frac{1}{k}}$. La massima area vale quindi:

$$Area(DEFG)\ massima = 6\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right) - 2k\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right)^3 = 6\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right) - 2\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 4\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 8\ \ se:$$

$$\sqrt{\frac{1}{k}} = 2\,, \frac{1}{k} = 4, \qquad k = \frac{1}{4}.$$

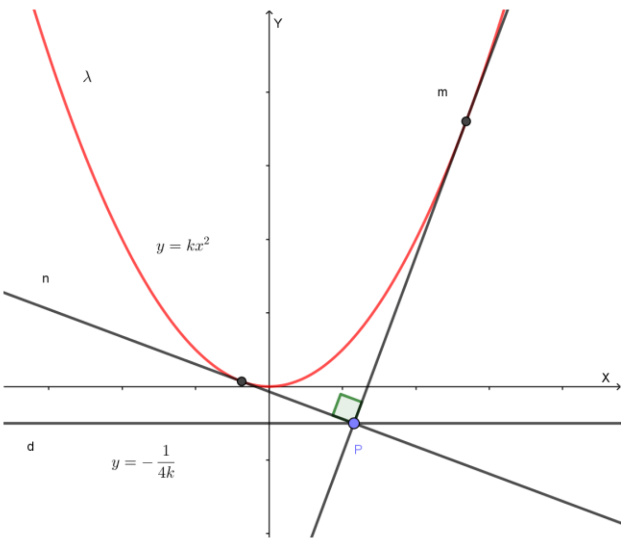
d)

Si dimostri che le rette tangenti a λ *condotte da un punto qualsiasi della retta* $y = -\frac{1}{4k}$ *sono tra loro perpendicolari.*

Osserviamo che la retta $y = -\frac{1}{4k}$ è la direttrice della parabola $y = kx^2$ e per una proprietà della parabola “le tangenti condotte da un punto della direttrice di una parabola alla parabola stessa sono fra loro perpendicolari”.

Animazione in Geogebra (cliccare sul triangolo in basso a sinistra per avviare l’animazione): https://www.geogebra.org/m/b7tarmtu

Dimostrazione diretta:



Sia $P = \left(t; -\frac{1}{4k}\right)$ il generico punto della retta $y = -\frac{1}{4k}$. La generica retta per P ha equazione: $y + \frac{1}{4k} = m(x-t)$, $y = mx - mt - \frac{1}{4k}$; intersecando questa retta con la parabola ed imponendo che si abbiano due intersezioni coincidenti si ha:

$kx^2 = mx - mt - \frac{1}{4k}$, $4k^2x^2 - 4kmx + 4kmt + 1 = 0$: imponiamo che sia $\frac{\Delta}{4} = 0$.

$4k^2m^2 - 4k^2(4kmt + 1) = 0$, $m^2 - 4kmt - 1 = 0$.

E per una nota proprietà delle equazioni di secondo grado di ha:

$m_1 \cdot m_2 = -1$ (per qualsiasi valore di k): e ciò dimostra che le due tangenti sono perpendicolari per ogni valore di k (>0).

Con la collaborazione di Angela Santamaria