Scuole italiane all'estero (America latina suppletiva) 2010

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani Oxy:

a)

si disegni la curva Γ di equazione $y = \sqrt[3]{x^2}$ e, in particolare, si dica se ammette estremi relativi o flessi.

Si tratta di una funzione potenza, $y = x^{\frac{2}{3}}$, definita e continua su tutto R, pari, si annulla in x=0 ed è positiva altrove. Risulta:

$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \;\; se\; x > 0, dove\; f\; è\; crescente\; ; y' < 0\; se\; x < 0, dove\; f\; è\; decrescente$: minimo relativo (ed assoluto) per x=0.

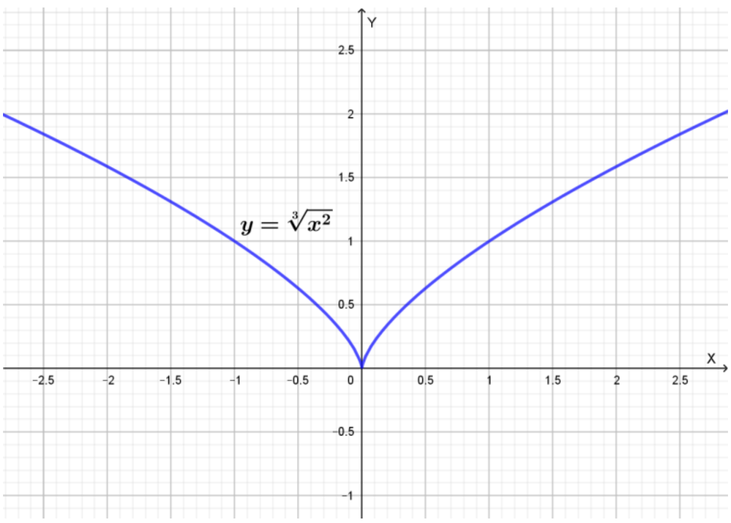
Non derivabile in x=0, dove c'è una cuspide verso il basso, essendo:

$y'_-(0) = -\infty \;\; e \;\; y'_+(0) = +\infty$

Risulta poi:

$y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} < 0 \;\; per\; ogni\; x \neq 0$: concavità per il basso per ogni $x \neq 0$, nessun flesso.

Grafico:



b)

Si scriva l'equazione della retta t tangente alla curva Γ nel suo punto di ascissa 8 e si determinino le coordinate dell'ulteriore punto in cui t incontra Γ .

Il punto di ascissa 8 è $P = (8; 4)$. La tangente t in A ha equazione:

$$t\colon\ y - 4 = y'(8)(x - 8),\ \ y - 4 = \frac{1}{3}(x - 8), \qquad t\colon\ y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

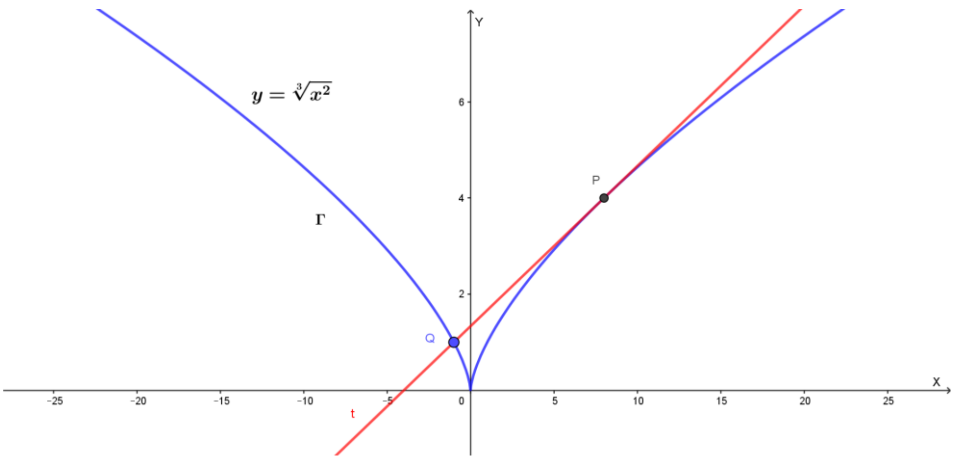
Cerchiamo le intersezioni fra $t\ e\ \Gamma$:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3} \\ y = \sqrt[3]{x^2} \end{cases} ; \quad \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \ , \quad 27x^2 = (x+4)^3 \ , \qquad x^3 - 15x^2 + 48x + 64 = 0$$

Questa equazione si può abbassare di grado mediante la regola di Ruffini sapendo che una radice è x=8:

$$(x+1)(x-8)^2 = 0$$

Quindi l'ulteriore punto Q in cui t incontra Γ ha coordinate $Q = (-1;\ 1)$.



c)

Si consideri il fascio di circonferenze tangenti nell'origine all'asse x e tra esse si determini quella che incontra Γ in due punti A e B diametralmente opposti. Si denoti con Λ tale circonferenza.

Il fascio di circonferenze (che hanno centro sull'asse y e passano per l'origine degli assi cartesiani) ha equazione del tipo: $x^2 + y^2 + ky = 0$

La circonferenza Λ ha centro $C=\left(0;\ -\frac{k}{2}\right)$ con $k<0$. AB deve essere uguale al diametro della circonferenza, che è uguale a $-k$ ed i punti A e B si ottengono intersecando Γ con la retta $y=-\frac{k}{2}$, retta parallela all'asse x passante per il centro C, perciò:

$$\sqrt[3]{x^2}=-\frac{k}{2},\quad x^2=-\frac{1}{8}k^3,\quad x=\pm\sqrt{-\frac{1}{8}k^3}$$

Imponiamo che il punto di ascissa $\sqrt{-\frac{1}{8}k^3}$ e ordinata $-\frac{k}{2}$ appartenga alla circonferenza generica del fascio:

$$\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{8}k^3+k\left(-\frac{k}{2}\right)=0\,,\ \ 2k^2-k^3-4k^2=0\,,\qquad k^3+2k^2=0\,:$$

$k=0\ \ (circonferenza\ degenere\ nel\ punto\ O)\ e\ \ k=-2$

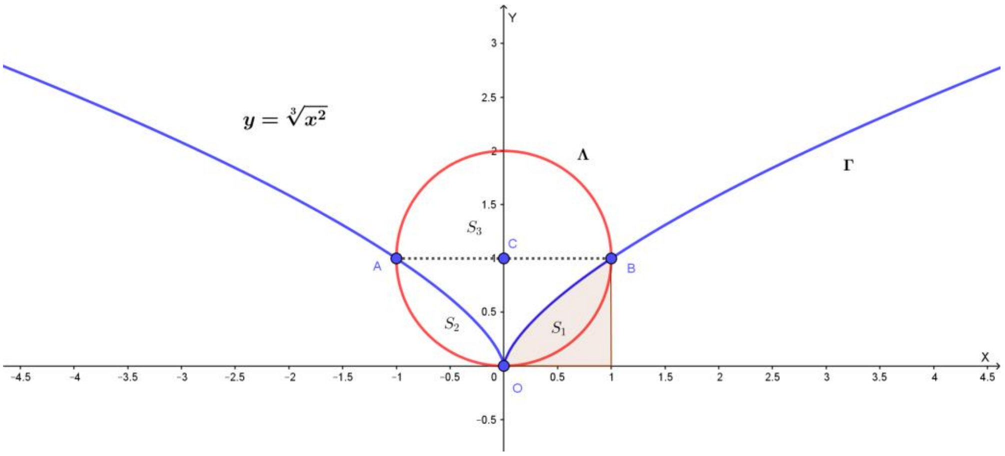
La circonferenza richiesta si ha per $k=-2$, quindi:

$\Lambda:\ x^2+y^2-2y=0$

I punti A e B hanno coordinate: $A=(-1;1),\ B=(1;1)$.

d)

Si calcoli l'area delle tre parti in cui il cerchio, di cui Λ è la circonferenza, è suddiviso dagli archi OA e OB di Γ .



Indichiamo con $S_1=S_2\ \ ed\ \ S_3$ le tre parti richieste. Indichiamo con S il valore del seguente integrale:

$$S=\int_0^1\sqrt[3]{x^2}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}\,dx=\frac{3}{5}\left[x^{\frac{5}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{5}$$

L'area T del triangolo mistilineo OBC si ottiene sottraendo S all'area del quadrato di lato OC, quindi: $T = 1 - S = \frac{2}{5}$. L'area S_1 si ottiene sottraendo T ad un quarto del cerchio di raggio 1 (che vale $\frac{\pi}{4}$):

$$S_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5} = S_2$$

S_3 si ottiene sottraendo all'area del cerchio di raggio 1 (che vale π) le due are S_1 ed S_2:

$$S_3 = \pi - 2S_1 = \pi - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{5} = S_3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria