Scuole italiane all'estero (America latina suppletiva) 2010 – Quesiti

QUESITO 1

Sia $n > 0$. Si dimostri che è: $n! \geq 2^{n-1}$.

Applichiamo il Principio d'induzione. Indicando con P(n) la proprietà da dimostrare, dimostriamola per n=1:

$$1! \geq 2^0 , \qquad 1 \geq 1 : \ vero$$

Supponiamo vera P(n), cioè supponiamo che valga $n! \geq 2^{n-1}$ e dimostriamo che vale P(n+1), cioè che $(n+1)! \geq 2^n$. Risulta:

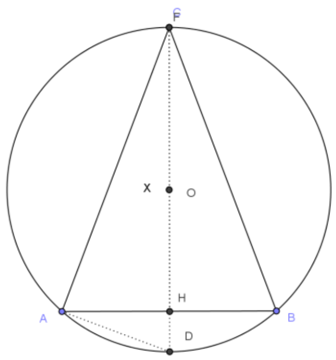
$$(n+1)! = n!\,(n+1) \geq 2^{n-1}(n+1), \ \ perchè \ \ n! \geq 2^{n-1}$$

$$2^{n-1}(n+1) \geq 2^{n-1}(2) = 2^n, \ \ perchè \ \ n+1 \geq 2$$

Quindi si ha: $(n+1)! \geq 2^n$. La proprietà è quindi vera per ogni n>0.

QUESITO 2

Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio R, qual è quello di superficie laterale massima?



La superficie laterale del cono è $S = \pi \cdot \overline{AH} \cdot \overline{AC}$

Poniamo CH = x e teniamo presente le limitazioni $0 \leq x \leq 2R$.

Risulta: $\overline{AH} = \sqrt{x(2R-x)}$ (per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo ADC).

L'apotema del cono AC vale: $\overline{AC} = \sqrt{x(2R)}$ (primo teorema di Euclide).

Quindi la superficie laterale è: $S=\pi\cdot\sqrt{2Rx^2(2R-x)}$, che è massima se lo è $y=x^2(2R-x)$. Studiando la derivata prima si scopre facilmente che il massimo richiesto si ha quando: $x=\frac{4}{3}R$. Infatti:

$$y' = 2x(2R-x) - x^2 = -3x^2 + 4Rx \geq 0 \;\; se \;\; 0 \leq x \leq \frac{4}{3}R$$

La funzione è quindi crescente per $0 \leq x < \frac{4}{3}R$ e decrescente per $\frac{4}{3}R < x \leq 2R$ ed è perciò massima quando $x = \frac{4}{3}R$.

Fra tutti i coni inscritti in una sfera di raggio R quello di superficie laterale massima ha altezza uguale ai 4/3 del raggio della sfera.

QUESITO 3

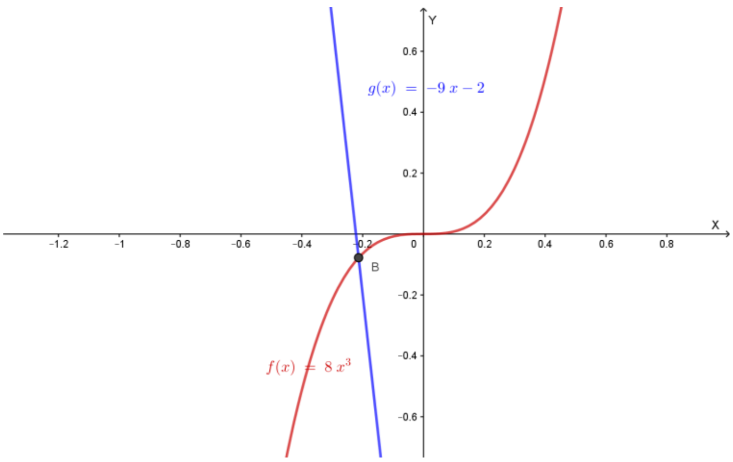
Si determini il punto della parabola $y = 2x^2$ *più vicino al punto di coordinate* $(-2;\,-2)$.

Indichiamo con $P = (x; y) = (x; 2x^2)$ il generico punto della parabola e calcoliamo la distanza da punto dato $A = (-2; -2)$.

$PA = \sqrt{(x+2)^2 + (2x^2+2)^2}$
Tale distanza è minima se lo è il suo quadrato $z = 4x^4 + 9x^2 + 4x + 8$. Risulta:

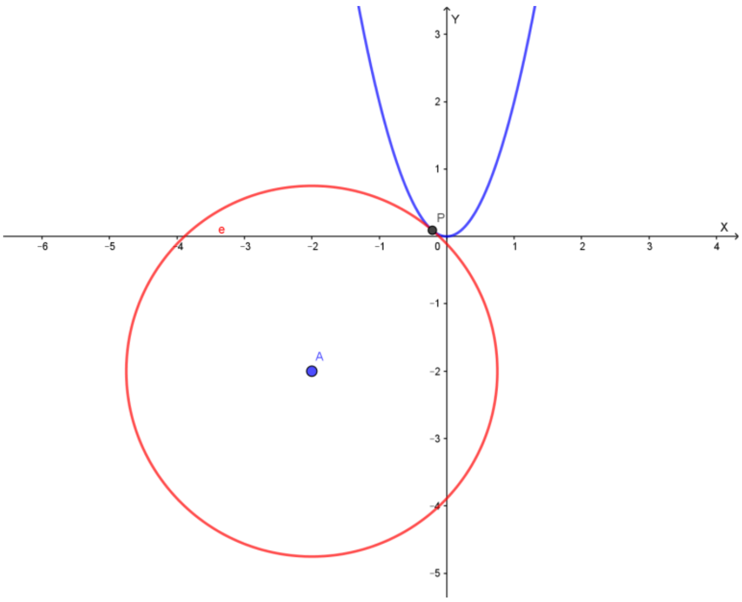
$z' = 16x^3 + 18x + 4 \geq 0 \quad se \quad 8x^3 + 9x + 2 \geq 0\,,\;\; 8x^3 \geq -9x - 2$

Studio grafico:



Risulta $z' \geq 0 \;\; se \;\; x \geq x_B \cong -0.2$. Quindi la funzione è crescente per $x > x_B$ e decrescente per $x < x_B$: il minimo richiesto si ha per $x_B \cong -0.2$.
Il punto richiesto è il punto di ascissa $x_B \cong -0.2$: $P = (x_B; 2x_B^2)$.

Osserviamo che il punto P richiesto è il punto di tangenza della circonferenza con centro in A e tangente alla parabola.



QUESITO 4

Si discuta l'equazione

$$x^2-(k-1)x+2=0 \qquad con\ \ 0\le x\le 2\,.$$

Il quesito richiama il metodo di **Tartinville**, molto meccanico ed oramai desueto, che preferiamo non utilizzare.

Metodo grafico

L'equazione può essere scritta nella forma:

$x^2-(k-1)x+2=0,\ \ x^2-kx+x+2=0\ ,\ \ k=\frac{x^2+x+2}{x}$

Quindi dobbiamo risolvere graficamente il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x}=x+1+\dfrac{2}{x} \\ y=k \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$$

Studiamo sommariamente la funzione (che è un'iperbole, essendo del tipo $xy=x^2+x+2$). Essa è definita, continua e derivabile per $x\ne 0$.

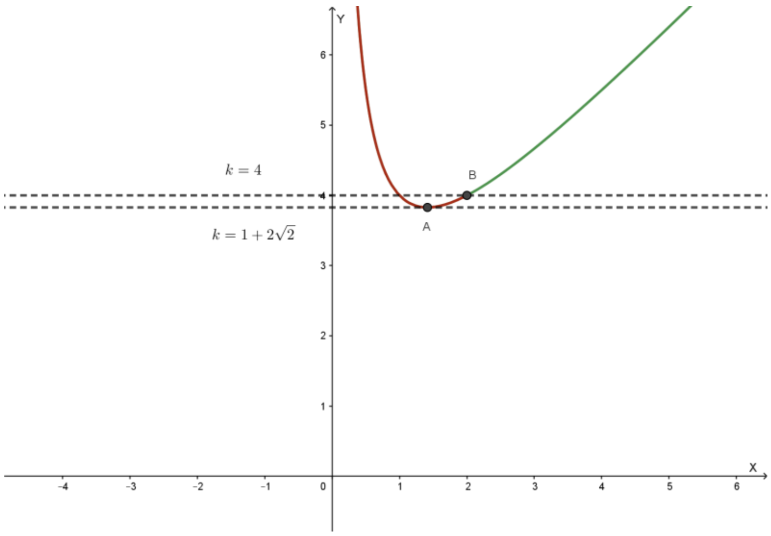
Abbiamo gli asintoti x=0 e y=x+1. È sufficiente studiare la derivata prima per uno studio qualitativo della funzione.

$$y' = 1 - \frac{2}{x^2} = 0 \quad per\ x = \pm\sqrt{2}\,, \qquad y' > 0 \quad per\ x < -\sqrt{2}\ vel\ \ x > \sqrt{2}$$

La funzione quindi è crescente per $x < -\sqrt{2}\ vel\ \ x > \sqrt{2}$ e decrescente per $-\sqrt{2} < x < 0\ \ vel\ \ 0 < x < \sqrt{2}$

Abbiamo un minimo relativo in $x = \sqrt{2}$, che vale $f(\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$ ed un massimo (assoluto) in $x = -\sqrt{2}$, che vale $f(-\sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$.

Abbiamo la seguente situazione grafica (A e B sono i punti di ascissa $\sqrt{2}\ \ e\ \ 2$):



Essendo $f(\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}\ \ ed\ \ f(2) = 4$ possiamo concludere che le radici dell'equazione appartengono all'intervallo [0; 2] se $k \geq 1 + 2\sqrt{2}$; in particolare abbiamo 1 radice se $k > 4$ e 2 radici se $1 + 2\sqrt{2} \leq k \leq 4$

QUESITO 5

Si dica, giustificando la risposta, se sono esatte le uguaglianze seguenti:

$$\arcsin(\sin(-0.3)) = -0.3 \qquad \arccos(\cos(-0.3)) = -0.3$$
$$\sin(\arcsin(-0.3)) = -0.3 \qquad \cos(\arccos(-0.3)) = -0.3$$

Ricordiamo che in generale risulta: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i,$ essendo i la funzione identità; come dire che, se $y = f(x)$ è una funzione invertibile, detta $x = f^{-1}(y)$ la sua inversa: risulta: $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y\ \ e\ \ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.

Posto $y = \sin(x) = f(x)$ risulta $x = \arcsin(y) = f^{-1}(y),\ \ con\ \ -1 \leq y \leq 1\ \ e -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
Quindi: $\arcsin(\sin(-0.3)) = -0.3$ e $\sin(\arcsin(-0.3)) = -0.3$ sono esatte.

Posto $y = \cos(x) = f(x)$ risulta $x = \arccos(y) = f^{-1}(y),\ \ con\ \ -1 \leq y \leq 1\ \ e\ \ 0 \leq x \leq \pi$
Quindi: $\arccos(\cos(-0.3)) = -0.3$ non è esatto
(sarebbe $\arccos(\cos(-0.3)) = \arccos(\cos(0.3)) = 0.3$
Invece $\cos(\arccos(-0.3)) = -0.3$ è esatto.

QUESITO 6

Si determini il periodo della funzione: $f(x) = \cos(3x) - 2\sin(2x) - 2tg\left(\frac{x}{2}\right)$.

$y = \cos(3x)$ ha periodo $T_1 = \frac{2\pi}{3}$; $y = \sin(2x)$ ha periodo $T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ e $y = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ ha periodo $T_3 = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. Il periodo T di f(x) è il minimo comune multiplo fra i periodi suddetti (i cui rapporti sono razionali), quindi: $T = m.c.m.\left(\frac{2\pi}{3}, \pi, 2\pi\right) = m.c.m.\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}\right) = 2\pi$.

QUESITO 7

Si determini l'equazione della normale alla curva $y = e^x$ *nel suo punto di ascissa* $x = ln\,3$.

Il punto P di ascissa $x = ln\,3$ ha ordinata $y = e^{ln\,3} = 3$: $P = (ln\,3; 3)$. Il coefficiente angolare della normale in P è $m = -1/f'(\ln 3)$. Quindi:

$$f'(x) = e^x\ ,\ \ f'(\ln 3) = 3,\quad m = -\frac{1}{3}$$

La normale in P ha quindi equazione:

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - \ln 3)\ ,\ \ y = -\frac{1}{3}x + 3 + \frac{1}{3}\ln 3$$

QUESITO 8

Si calcoli

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!}\binom{n}{k}\right].$$

Ricordiamo che $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, quindi:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!}\binom{n}{k}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{k!\,(n-k)!}\right]=0$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria