

PROBLEMA 1

Sia  $\lambda$  la parabola d'equazione  $f(x) = 1 + x^2$

- Sia  $F$  il fuoco di  $\lambda$  e  $r$  la sua retta direttrice. Si determinino le coordinate di  $F$  e l'equazione di  $r$
- Siano  $A$  e  $B$  i punti di  $\lambda$  di ordinata 5 e  $S$  il segmento parabolico di base  $AB$ . Si determini la retta  $y = k$  che dimezza l'area di  $S$ .
- Si determini il volume del solido generato dalla rotazione di  $S$  intorno all'asse  $x$ .
- Si calcoli  $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$  e lo si interpreti geometricamente.

PROBLEMA 2

Nel piano  $Oxy$  sono dati i punti  $A(2, 0)$  e  $B(4, k)$ , con  $k \in R$ . Sia  $P$  il punto ottenuto dalla intersezione della retta  $x = k$  con la perpendicolare per  $B$  alla retta  $AB$ .

- Si provi che il luogo geometrico  $\gamma$  descritto da  $P$  al variare di  $k$  ha equazione:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}$$

- Se disegni  $\gamma$
- Si scriva l'equazione della retta  $r$  tangente a  $\gamma$  nel punto di ascissa 1
- Si calcoli l'area della parte di piano delimitata da  $r$ , da  $\gamma$  e dalla retta  $x = 2$ .

QUESTIONARIO

1. Sia  $p(x)$  un polinomio di grado  $n$ . Si dimostri che la sua derivata  $n$ -esima è  $p^{(n)}(x) = n! a_n$  dove  $a_n$  è il coefficiente di  $x^n$
2. Siano  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $A$ ,  $r$  la retta perpendicolare in  $B$  al piano del triangolo e  $P$  un punto di  $r$  distinto da  $B$ . Si dimostri che i tre triangoli  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  sono triangoli rettangoli.
3. Sia  $\gamma$  il grafico di  $f(x) = e^{3x} + 1$ . Per quale valore di  $x$  la retta tangente a  $\gamma$  in  $(x, f(x))$  ha pendenza uguale a 2?
4. Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema  $80\text{cm}$ . Quale è la capacità in litri del serbatoio?
6. Si determini il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{\cos x}$
7. Per quale o quali valori di  $k$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

è continua in  $x = 4$ ?

8. Se  $n > 3$  e  $\binom{n}{n-1}$ ,  $\binom{n}{n-2}$ ,  $\binom{n}{n-3}$  sono in progressione aritmetica, qual è il valore di  $n$ ?
9. Si provi che non esiste un triangolo  $ABC$  con  $AB=3$ ,  $AC=2$  e  $\hat{A}BC = 45^\circ$ . Si provi altresì che se  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\hat{A}BC = 30^\circ$ , allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenta la risposta.