# Liceo della comunicazione 2010 – PROBLEMA 1

*Sia $\lambda$ la parabola d'equazione $f(x) = 1 + x^2$.*

## a)

*Sia F il fuoco di $\lambda$ e r la sua retta direttrice. Si determinino le coordinate di F e l'equazione di r.*

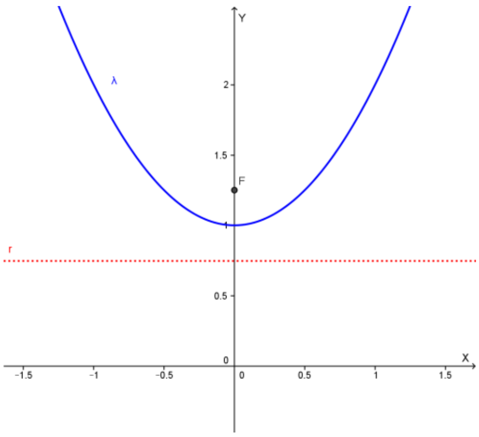
La parabola è del tipo $y = ax^2 + bx + c$ ed il fuoco ha le seguenti coordinate:

$$x_F = -\frac{b}{2a} = 0\,,\quad y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{5}{4}:\quad F = \left(0; \frac{5}{4}\right).$$

La direttrice r ha equazione:

$$y = \frac{-1-\Delta}{4a} = \frac{3}{4},\quad r:\ y = \frac{3}{4}$$

La parabola ha il seguente grafico:

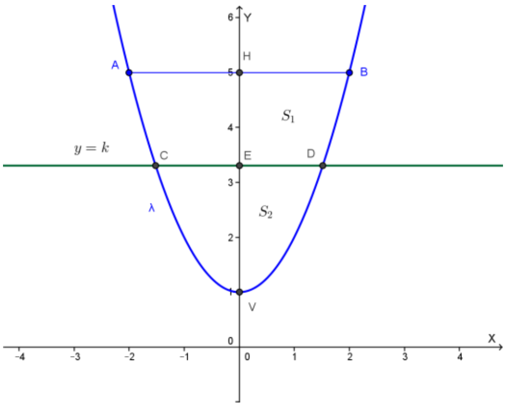



## b)

*Siano A e B i punti di $\lambda$ di ordinata 5 e S il segmento parabolico di base AB. Si determini la retta $y = k$ che dimezza l'area di S.*

I punti A e B hanno coordinate: $A = (-2; 5)$, $B = (2; 5)$.
Il segmento parabolico S di base AB (per il teorema di Archimede) ha area:

$$Area(S) = \frac{2}{3} \cdot AB \cdot VH = \frac{2}{3}(4)(4) = \frac{32}{3}\ u^2$$




Detti C e D i punti di intersezione fra la retta $y = k$ cerchiamo le loro ascisse:

$x^2 + 1 = k,\ \ x^2 = k - 1,\ \ x = \pm\sqrt{k-1},\qquad con\ \ k \geq 1.$

Risulta quindi: $CD = 2\sqrt{k-1}$ quindi il segmento parabolico di base CD ha area:

$Area(S_2) = \frac{2}{3} \cdot CD \cdot VE = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{k-1}\right)(k-1)$

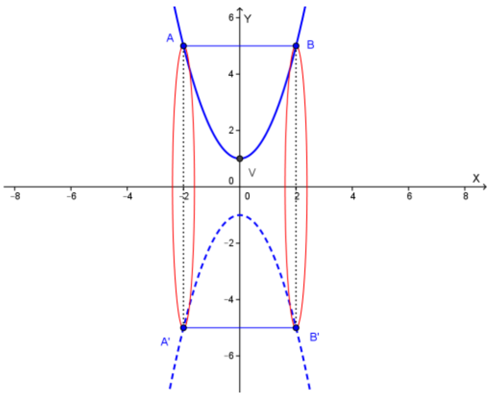
Siccome deve essere $Area(S_2) = Area(S_1) = \frac{1}{2}Area(S) = \frac{16}{3}$, si ha:

$\frac{2}{3}\left(2\sqrt{k-1}\right)(k-1) = \frac{16}{3},\qquad \left(\sqrt{k-1}\right)(k-1) = 4,\qquad (k-1)^3 = 16,\qquad k - 1 = \sqrt[3]{16},$

$k = 1 + 2\sqrt[3]{2}$ .

## c)

*Si determini il volume del solido generato dalla rotazione di S intorno all'asse x.*




Ricordiamo che le coordinate di B sono: $B = (2; 5)$.

Il volume richiesto è il doppio del volume che si ottiene sottraendo al cilindro con raggio di base 5 e altezza 2 il volume ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x della parte di S situata nel primo quadrante. Quindi:

$$V = 2\left[\pi \cdot 25 \cdot 2 - \pi \int_0^2 (x^2+1)^2 dx\right] = 2\left[50\,\pi - \pi \int_0^2 (x^4+2x^2+1)dx\right] =$$

$$= 2\left[50\,\pi - \pi\left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^2\right] = 2\left[50\,\pi - \pi\left[\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2\right]\right] = \frac{1088}{15}\pi\ u^3 \cong 228\ u^3 = V$$

## d)

*Si calcoli* $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$ *e lo si interpreti geometricamente.*

Risulta:

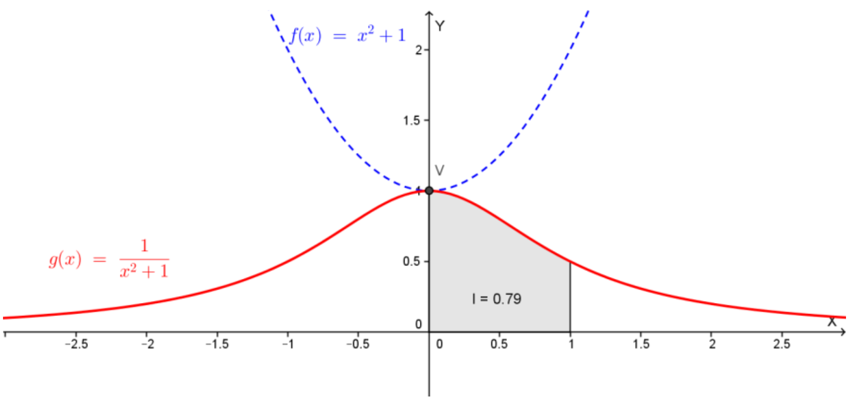
$$\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}dx = [arctg(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

L'integrale richiesto rappresenta l'area della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = \frac{1}{1+x^2}$ , dall'asse x e dalle rette x=0 e x=1.

La funzione di equazione

$$y = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{f(x)}$$

si può ottenere facilmente a partire dal grafico della parabola di partenza come funzione reciproca:




Con la collaborazione di Angela Santamaria