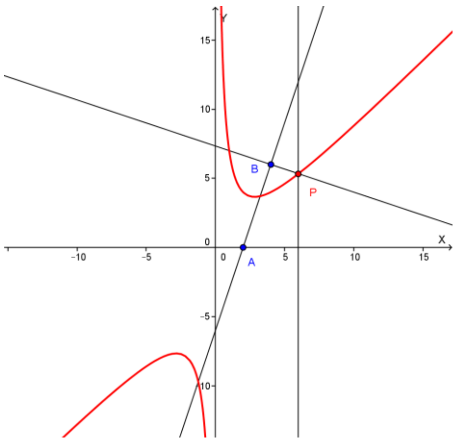
Liceo della comunicazione 2010 – PROBLEMA 2

Nel piano Oxy sono dati i punti A(2; 0) e B(4; k), con $k \in R$. Sia P il punto ottenuto dalla intersezione della retta $x = k$ con la perpendicolare per B alla retta AB.



a)

Si provi che il luogo geometrico γ descritto da P al variare di k ha equazione:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}$$

La retta AB ha coefficiente angolare $m = \frac{k}{2}$. Quindi la perpendicolare ha coefficiente angolare $-\frac{2}{k}$ (con $k \neq 0$). La perpendicolare in B alla retta AB ha equazione:

$$y - k = -\frac{2}{k}(x - 4)$$

Il punto P si ottiene quindi risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x = k \\ y - k = -\frac{2}{k}(x - 4) \end{cases}$$

Il luogo descritto da P si ottiene eliminando il parametro k:

$$\begin{cases} k = x \\ y - x = -\frac{2}{x}(x - 4) \end{cases}; \quad y = -2 + \frac{8}{x} + x\,; \quad y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}$$

Osserviamo che se k=0 si ha B=(4;0), quindi la perpendicolare ad AB in B ha equazione x=4; la retta x=k diventa x=0 e quindi il punto P non esiste.

Il luogo richiesto è quindi costituito dalla curva di equazione $y = \frac{x^2-2x+8}{x}$.

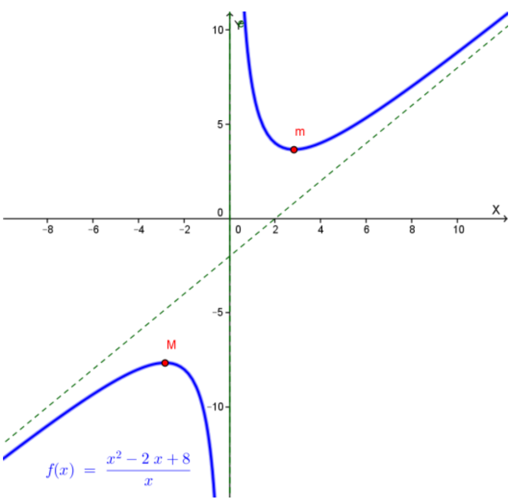
b)

Si disegni γ .

Osserviamo che la curva γ è un'iperbole, poiché può essere scritta nella forma:

$x^2 - xy - 2x + 8 = 0$ e quindi è una conica. Avendo l'asintoto verticale x=0 può essere solo un'iperbole.

Questa osservazione ci permette di semplificare lo studio della funzione, in quanto è sufficiente trovare l'asintoto obliquo ed il massimo e minimo.
La funzione può essere scritta nella forma:
$y = x - 2 + \frac{8}{x}$, quindi l'asintoto obliquo ha equazione: $y = x - 2$ (ricordiamo che C.N.S. affinché la funzione $y = f(x)$ abbia l'asintoto obliquo $y = mx + q$ è essa si possa scrivere nella forma: $f(x) = mx + q + g(x)$, con $g(x)$ infinitesimo per x che tende all'infinito).
Determiniamo ora il massimo ed il minimo della funzione (è sufficiente in questo caso trovare i punti che annullano la derivata prima).
La derivata prima è:
$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^2} = 0$ se $x = \pm 2\sqrt{2}$.
Se $x = -2\sqrt{2}$ risulta $y = \frac{8+4\sqrt{2}+8}{-2\sqrt{2}} = -4\sqrt{2} - 2$
Se $x = 2\sqrt{2}$ risulta $y = \frac{8-4\sqrt{2}+8}{2\sqrt{2}} = \frac{8-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 2$
Quindi il massimo (relativo) ha coordinate $M = \left(-2\sqrt{2}; -4\sqrt{2} - 2\right)$ ed il minimo relativo $\mathrm{m} = \left(2\sqrt{2}; 4\sqrt{2} - 2\right)$. Osserviamo che tali punti sono simmetrici rispetto a $(0; -2)$, che è il centro dell'iperbole.
Il grafico della funzione è quindi il seguente:



c)

Si scriva l'equazione della retta r tangente a γ nel punto di ascissa 1.

Da $y = f(x) = \frac{x^2-2x+8}{x}$ se x=1 otteniamo y=7; il punto di tangenza ha quindi coordinate (1; 7).

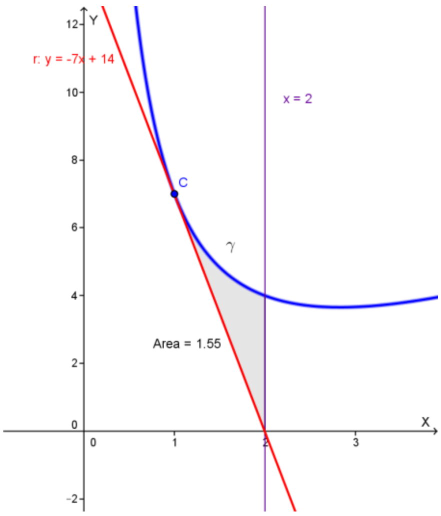
Essendo $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^2}$ ricaviamo il coefficiente angolare della retta r: $m = f'(1) = -7$
La retta r ha quindi equazione:

$r\colon \quad y - 7 = -7(x-1); \qquad y = -7x + 14$

d)

Si calcoli l'area della parte di piano delimitata da r, da γ e dalla retta x=2.

Rappresentiamo la regione indicata:



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_1^2 \left[\frac{x^2-2x+8}{x} - (-7x+14)\right] dx = \int_1^2 \left[8x - 16 + \frac{8}{x}\right] dx = 8\left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln|x|\right]_1^2$$
$$= 8\left(2 - 4 + \ln(2) - \frac{1}{2} + 2\right) = (8\ln(2) - 4)\ u^2 \cong 1.5452\ \ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria