Liceo della comunicazione 2010 – QUESITI

QUESITO 1

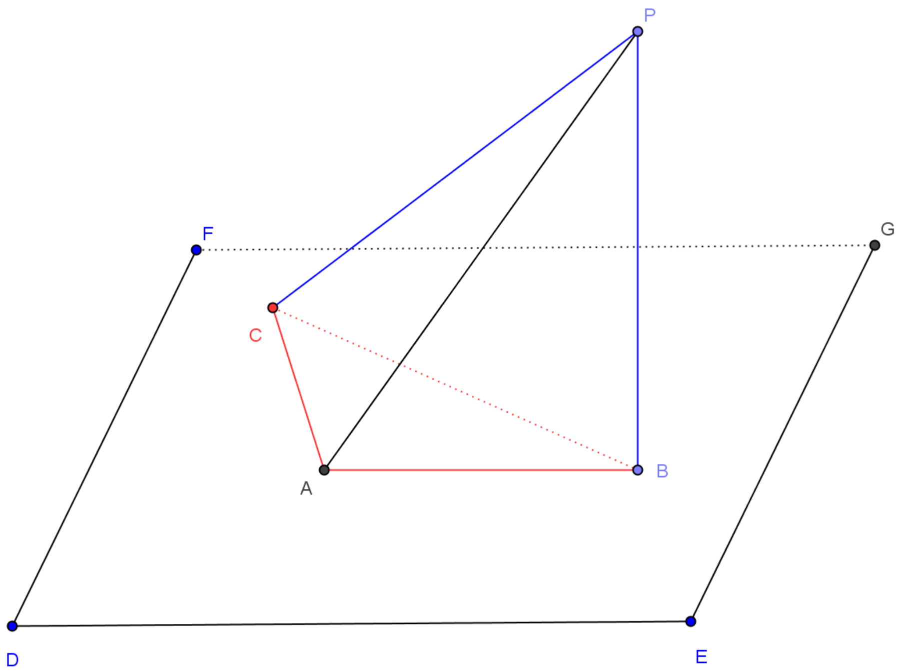
Siccome la derivata annulla le costanti e abbassa di uno l'esponente delle potenze, si avrà:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$p'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots$

$p^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \ldots (2)(1) a_n = n!\, a_n$

QUESITO 2



Siccome PB è perpendicolare al piano di ABC, è perpendicolare a qualsiasi retta passante per B appartenente al piano, quindi PB è perpendicolare ad AB e a CB: i triangoli PAB e PBC sono quindi rettangoli in B.

Siccome dal piede della perpendicolare B al piano si conduce la perpendicolare BA alla retta AC dello stesso piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano individuato da PB e AB (**teorema delle tre perpendicolari**): quindi CA è perpendicolare alla retta PA e pertanto CAP è rettangolo in A.

Si può alternativamente utilizzare il teorema di Pitagora per mostrare che CAP è rettangolo in A:

dal triangolo PAB: $PA^2 = PB^2 + AB^2$

dal triangolo PBC: $PC^2 = PB^2 + BC^2$.

Ricavando PB^2 dalla prima relazione e PC^2 dalla seconda si ottiene

$PC^2 = (PA^2 - AB^2) + BC^2 = PA^2 + (BC^2 - AB^2) = PA^2 + AC^2$

dove nell'ultima uguaglianza si è applicato il teorema di Pitagora al triangolo ABC.

Risulta quindi $PC^2 = PA^2 + AC^2$ *che dimostra che il triangolo PAC è rettangolo in A.*

QUESITO 3

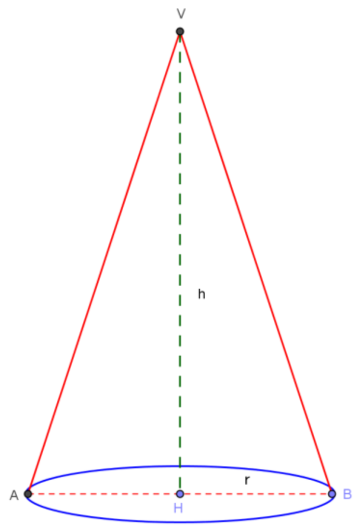
La pendenza della generica retta tangente al grafico di f in $(x, f(x))$ è pari a $f'(x)$, ne segue che occorre cercare x tale che:

$$2 = 3e^{3x} \Rightarrow e^{3x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

QUESITO 4

$$\lim_{x\to\infty} 4x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} 4\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 4$$

QUESITO 5



L'apotema del cono è 80 cm=8 dm. Indichiamo con h l'altezza del cono e con r il raggio di base del cono. Si ha $r^2 = 64 - h^2$.

Il volume del cono è

$$V(h) = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}h(64 - h^2).$$

Cerchiamo il massimo di V.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(64 - 3h^2\right) = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{64}{3}}$$

Essendo la derivata positiva prima di questo valore e negativa dopo si ha che esso è punto di massimo. Risulta

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{128}{3}\sqrt{\frac{64}{3}} \approx 206.370 dm^3 = 206.370\ l$$

che è la capacità massima

QUESITO 6

Il dominio della funzione coseno è tutto R. Il dominio di $f(x)=\sqrt{\cos x}$ *si ottiene da:*

$\cos x \geq 0$ *da cui:* $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$.

QUESITO 7

Si ha f(4)=0 ed essendo un polinomio continuo si ha anche che il limite sinistro in 4 vale 0. Controlliamo il limite destro. La funzione è continua se e solo se anche questo limite vale 0. Dobbiamo quindi porre:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=16k-8-1=16k-9=0 \Rightarrow k=\frac{9}{16}$$

QUESITO 8

Si tratta di verificare che, se n>3:

$$\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}=\binom{n}{n-3}-\binom{n}{n-2}.$$

Equivalente a:

$$2\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}=\binom{n}{n-3}$$

$$2\frac{n!}{(n-2)!2!}-\frac{n!}{(n-1)!1!}=\frac{n!}{(n-3)!3!}$$

$$\frac{n!}{(n-2)(n-3)!}-\frac{n!}{(n-1)(n-2)(n-3)!}=\frac{n!}{(n-3)!3!}$$

Riducendo al minimo comune multiplo si arriva all’equazione:

$n^2-9n+14=0$ che ha le soluzioni n=2 ed n=7 **di cui è accettabile solo n=7.**

QUESITO 9

1) Per il teorema dei seni $\frac{3}{sen\gamma}=\frac{2}{sen45°}$ da cui $sen\gamma=\frac{3\sqrt{2}}{4}>1 \Rightarrow$ impossibile.

2)Sempre per il teorema dei seni: $\frac{3}{sen\gamma}=\frac{2}{sen30°}$ da cui $sen\gamma=\frac{3}{4}\Rightarrow \gamma=sen^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ quindi

$\gamma_1=48{,}59°$ e $\gamma_2=\pi-\gamma_1=131{,}41°$, entrambi accettabili.

QUESITO 10

Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.

Si tratta di trovare la probabilità che le due figlie di Anna siano femmine sapendo che almeno una è femmina. I casi possibili sono in generale (nell'ordine primo e secondo figlio):

MF, MM, FM, FF.

Se almeno un figlio è femmina i casi possibili sono 3 (si esclude MM) ed i casi favorevoli 1 (FF). Quindi la probabilità richiesta è 1/3.

Si può utilizzare anche la formula di Bayes considerando gli eventi:

A="almeno un figlio è femmina" ;
B="il secondo figlio è femmina"

La probabilità richiesta è data dalla probabilità condizionata:

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(2\ Femmine)}{p(uno\ o\ due\ femmine)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria