LICEO DELLA COMUNICAZIONE 2010 SESSIONE SUPPLETIVA

PROBLEMA 1

In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy una curva γ ha per equazione

$$y = \frac{3(x-1)^2}{ax^2+bx+c}$$

1)

Si calcolino i valori delle costanti reali a, b, c, sapendo che γ ha per asintoti le rette di equazioni y = 3 e x = -2 , e passa per il punto (3; 12/5).

$$y = \frac{3(x-1)^2}{ax^2+bx+c} = \frac{3x^2-6x+3}{ax^2+bx+c}$$

L'asintoto orizzontale ha equazione: $y = \frac{3}{a}$, quindi $\frac{3}{a} = 3,\ a = 1$.

Essendo x=-2 asintoto verticale, il denominatore si deve annullare per x=-2, quindi:

$4a - 2b + c = 0,\quad 4 - 2b + c = 0$.

Imponiamo il passaggio per il punto (3; 12/5):

$\frac{12}{5} = \frac{12}{9a+3b+c}$, $\quad 9a + 3b + c = 5,\quad 3b + c = -4$

Quindi:

$\begin{cases} 4 - 2b + c = 0 \\ 3b + c = -4 \end{cases}$, $\begin{cases} -2b + c + 4 = 0 \\ 3b + c + 4 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$

Si ha quindi: $a = 1,\ b = 0\ e\ c = -4$. La funzione ha quindi equazione.

$$y = \frac{3(x-1)^2}{x^2-4}$$

2)

Si studi la funzione così ottenuta e si disegni il relativo grafico.

$$y = \frac{3(x-1)^2}{x^2-4}$$

Dominio: $-\infty < x < -2\,,\ -2 < x < 2,\ 2 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

$f(-x) = \frac{3(-x-1)^2}{x^2-4} \neq f(x)$: quindi la funzione non è pari

$f(-x) \neq -f(x)$: quindi la funzione non è dispari

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0\,,\ y = -\frac{3}{4}$.
Se $y = 0,\ \ 3(x-1)^2 = 0\,, x = 1\ (doppia)$: il grafico è tangente all'asse x in (1; 0).

Segno della funzione:

$y > 0\ \ se\ \ x^2 - 4 > 0$: $x < -2, \qquad y > 2$

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = 3$, $y = 3$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

$\lim_{x\to(-2)^{\pm}} \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = \mp\infty$: $x = -2$ asintoto verticale destro e sinistro

$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = \pm\infty$: $x = 2$ asintoto verticale destro e sinistro

Derivata prima:

$f'(x) = \frac{6x^2-30x+24}{(x^2-4)^2} \geq 0$ se $6x^2 - 30x + 24 \geq 0, x^2 - 5x + 4 \geq 0$: $x < 1,\ x > 4$: in tale intervallo la funzione è crescente;

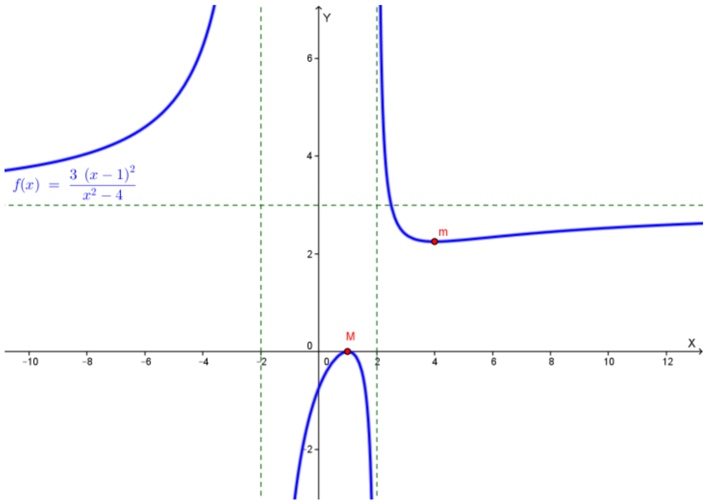
$x = 1$ è punto di massimo relativo con ordinata 0.
$x = 4$ è punto di minimo relativo con ordinata 9/4.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{120 - 144x + 90x^2 - 12x^3}{(x^2-4)^2} \geq 0 \quad se \quad 120 - 144x + 90x^2 - 12x^3 \geq 0,$$
$$-6(2x^3-15x^2+24x-20) \geq 0, \;\; (2x^3-15x^2+24x-20) \leq 0$$

Dallo studio finora effettuato possiamo dedurre che la curva ha un flesso per x>4 (in un valore irrazionale, che può essere trovato solo in modo approssimato).

Il grafico della funzione è il seguente:



3)

L'equazione di γ può porsi sotto la forma:

$$y = 3 + \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2}.$$

Si determinino le costanti α e β.

$$\frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = \frac{3x^2-6x+3}{x^2-4}$$

Effettuando la divisione tra il numeratore ed il denominatore otteniamo:

$3x^2 - 6x + 3 = (x^2-4)3 - 6x + 15$; quindi:

$$\frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = \frac{3x^2-6x+3}{x^2-4} = \frac{(x^2-4)3 - 6x + 15}{x^2-4} = 3 + \frac{-6x+15}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{-6x+15}{(x+2)(x-2)} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2} = \frac{\alpha(x+2)+\beta(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x(\alpha+\beta)+2\alpha-2\beta}{(x+2)(x-2)}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-6 \\ 2\alpha-2\beta=15 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha=\frac{3}{4} \\ \beta=-\frac{27}{4} \end{cases}$$

Quindi:

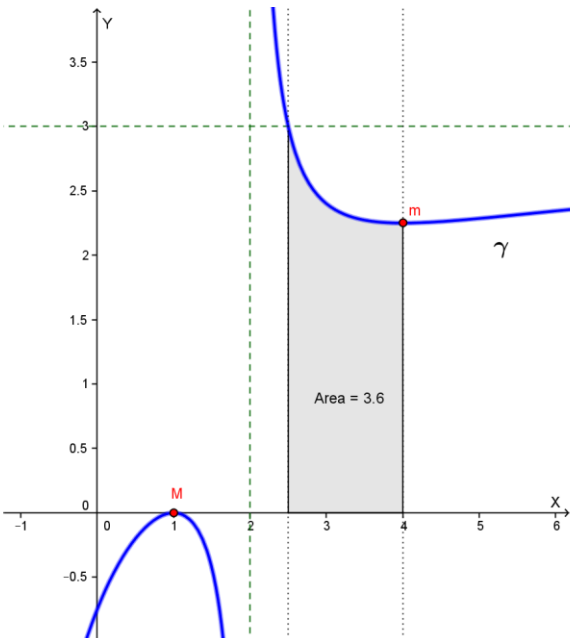
$$\frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = 3 + \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{27}{4}}{x+2}$$

4)

Si calcoli l'area della superficie piana, finita, delimitata da γ, dall'asse x e dalle rette x = 4 e x = k , essendo k l'ascissa del punto in cui la curva incontra l'asintoto orizzontale.

Cerchiamo il punto in cui la curva incontra l'asintoto orizzontale:

$$\begin{cases} y=\frac{3x^2-6x+3}{x^2-4} \\ y=3 \end{cases}, \quad \frac{3x^2-6x+3}{x^2-4}=3, \quad 3x^2-6x+3=3x^2-12, \quad x=\frac{5}{2}=k$$



L'area richiesta è data da:

$$Area = \int_{\frac{5}{2}}^{4} \left(3 + \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{27}{4}}{x+2}\right) dx =$$

$$= \left[3x + \frac{3}{4}\ln|x-2| - \frac{27}{4}\ln|x+2|\right]_{\frac{5}{2}}^{4} =$$

$$= 12 + \frac{3}{4}ln2 - \frac{27}{4}ln6 -$$

$$-\left(\frac{15}{2} + \frac{3}{4}ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{27}{4}ln\left(\frac{9}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{9}{2} - 12ln2 + \frac{27}{4}ln3 \cong 3.60 \ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria