LICEO DELLA COMUNICAZIONE 2010 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$y = \frac{\sqrt{2sen(2x) - \sqrt{3}}}{\log cosx}, \quad con \quad 0 \le x \le 2\pi$$

Il campo di esistenza si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2sen(2x) - \sqrt{3} \ge 0 \\ cosx \ge 0 \\ \log cosx \ne 0 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2sen(2x) - \sqrt{3} \ge 0 \\ cosx \ge 0 \\ log\, cosx \ne 0 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases} ; \quad \begin{cases} sen(2x) \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi \\ \cos x \ne 1 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2x \le \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi \\ x \ne 0, x \ne 2\pi \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k\pi \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi \\ x \ne 0, x \ne 2\pi \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}, \frac{7}{6}\pi \le x \le \frac{4}{3}\pi \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi \\ x \ne 0, x \ne 2\pi \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$$

Il campo di esistenza è quindi: $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}$

QUESITO 2

Si il limite della funzione $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$, *quando x tende a* 1^+.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.
La funzione può essere scritta nella forma:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x^2-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}\,(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \quad se \;\; x \to 1^+$$

QUESITO 3

Si provi che le due funzioni $f(x) = \cos^2 x$ *e* $g(x) = -sen^2 x$ *hanno le derivate uguali e se ne dia una giustificazione.*

Risulta:

$$f'(x) = -2sen(x)\cos(x) \quad , \quad g'(x) = -2sen(x)cosx$$

Quindi le due funzioni hanno la stessa derivata.

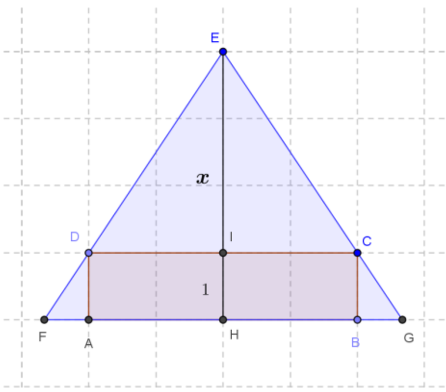
Osserviamo che $h(x) = f(x) - g(x) = \cos^2 x + sen^2 x = 1$ e quindi $h'(x) = 0$.

Ma $h'(x) = f'(x) - g'(x)$, quindi $f'(x) - g'(x) = 0$ perciò $f'(x) = g'(x)$.

Si può anche notare che $f(x) = \cos^2 x = 1 - sen^2 x = 1 + g(x)$, quindi f e g differiscono per una costante e perciò hanno la stessa derivata.

QUESITO 4

Un rettangolo ABCD è tale che risulta AB = 4 e BC =1.
Si determini il triangolo isoscele di area minima circoscritto al rettangolo e tale che la base contenga il segmento AB.



Posto EI=x (con x>0), dalla similitudine fra i triangoli EFG ed EDC si ha:

$$FG : CD = EH : EI, \quad FG : 4 = (1+x) : x, \quad FG = \frac{4(1+x)}{x}$$

L'area del triangolo EFG circoscritto al rettangolo dato è quindi:

$A(EFG) = \frac{1}{2} \cdot FG \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot \frac{4(1+x)}{x} \cdot (1+x) = \frac{2(1+x)^2}{x}$ che è mima se lo è:

$$y = \frac{2(1+x)^2}{x}, \quad con\ x > 0$$

Studiamo la derivata prima:

$$y' = 2 - \frac{2}{x^2} \geq 0 \quad se \quad x^2 - 1 \geq 0, \quad x \leq -1 \; or \; x \geq 1$$

Quindi y è crescente se x>1 e decrescente fra 0 ed 1: è minima se x=1.

L'area del triangolo è minima se la sua altezza è 2; l'area minima vale 8.

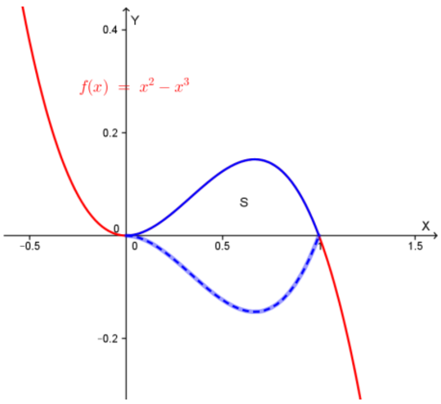
QUESITO 5

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = x^2 - x^3$ *e dall'asse delle x.*

Osserviamo che la curva taglia l'asse x nei punti di ascissa 0 ed 1 e che risulta

$$x^2 - x^3 \geq 0 \quad se \; x^2(1-x) \geq 0 \quad se \; x \leq 1$$

Il grafico qualitativo della funzione (cubica) è quindi il seguente:



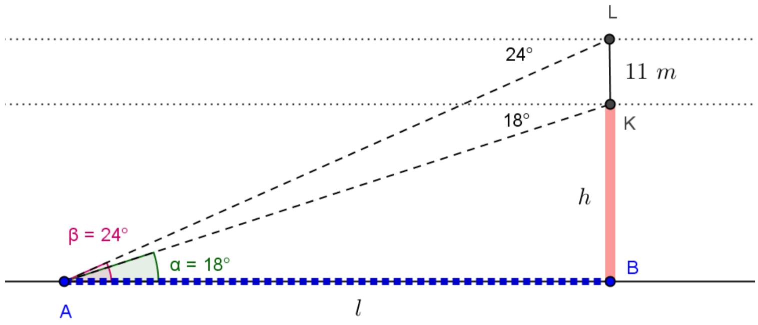
Il volume richiesto si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^5 + x^6)dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3}x^6 + \frac{x^7}{7}\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{105} \; u^3 \cong 0.030 \; u^3 = V$$

QUESITO 6

In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.



Indichiamo con h l'altezza della roccia e con l la larghezza del fiume. Risulta:

$h = l \cdot tg18°$, $h + 11 = l \cdot tg24°$, da cui:

$$\frac{h}{tg18°} = \frac{h+11}{tg24°} \implies h(tg24° - tg18°) = 11\, tg18° \implies h = \frac{11\, tg18°}{tg24° - tg18°} \cong 29.71\, m$$

Quindi:

$$l = \frac{h}{tg18°} \cong \frac{29.71\, m}{tg18°} \cong 91.44\, m$$

Il fiume, nel punto richiesto, è quindi largo circa 91.44 metri.

QUESITO 7

Considerata la funzione: $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, *dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che* $lim_{x \to 0} f(x) = 2$.

Risulta:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3xln3} - e^{xlna}}{e^{xln6} - e^{xln5}} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{3xln3} - 1) - (e^{xlna} - 1)}{(e^{xln6} - 1) - (e^{xln5} - 1)} =$$

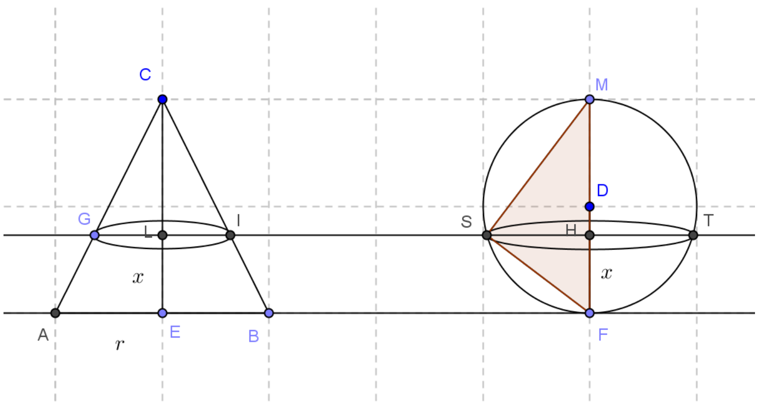
$$= \lim_{x\to 0} \frac{3xln3 - xlna}{xln6 - xln5} = \frac{3ln3 - lna}{ln6 - ln5} = \frac{ln\left(\frac{27}{a}\right)}{ln\left(\frac{6}{5}\right)} = 2 \quad se \quad ln\left(\frac{27}{a}\right) = 2 \cdot ln\left(\frac{6}{5}\right) \quad da\ cui:$$

$$ln\left(\frac{27}{a}\right) = ln\left(\frac{36}{25}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{27}{a} = \frac{36}{25} \quad \Longrightarrow \quad a = 27 \cdot \frac{25}{36} = \frac{75}{4}$$

(Nota: ricordiamo che , se $f(x) \to 0$, risulta: $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$).

QUESITO 8

Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza 2r, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?



La distanza x dal piano α soddisfa la limitazione: $0 \leq x \leq 2r$

La sezione con il cono ha area: $S(cono) = \pi \cdot GL^2$
Determiniamo GL.
Dalla similitudine fra i triangoli GLC e AEC segue che:

$$GL: CL = AE: CE \quad \Longrightarrow \quad GL: (2r - x) = r: 2r \quad \Longrightarrow \quad GL = \frac{2r - x}{2}$$

Quindi: $S(cono) = \pi \cdot GL^2 = \pi \cdot \left(\frac{2r-x}{2}\right)^2$

La sezione con la sfera ha area: $S(sfera) = \pi \cdot SH^2$
Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo FSM risulta:

$SH^2 = FH \cdot HM = x(2r - x)$

Quindi: $S(sfera) = \pi \cdot SH^2 = \pi \cdot x \cdot (2r - x)$

La somma delle aree delle sezioni è quindi:

$S = S(cono) + S(sfera) = \pi \cdot \left(\frac{2r-x}{2}\right)^2 + \pi \cdot x \cdot (2r - x)$ che è massima se lo è:

$y = \left(\frac{2r-x}{2}\right)^2 + x \cdot (2r - x) = (2r - x)\left(\frac{2r-x}{4} + x\right) = (2r - x)\left(\frac{2r+3x}{4}\right) = \max se\ lo$ è:

$z = (2r - x)(2r + 3x) = -3x^2 - 4rx + 4r^2$; tale funzione ha per grafico una parabola con la concavità rivolta verso il basso, quindi ha il massimo nel vertice, cioè per:

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{4r}{6} = \frac{2}{3}r$, valore che soddisfa la limitazione della x.

In conclusione:

La somma delle aree delle sezioni è massima quando la distanza x dal piano di base α è uguale ai 2/3 del raggio di base del cono.

QUESITO 9

Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

Risulta: $f'(x) = 2ax + b$, quindi (ricordando che $x_1 + x_2 = -b/a$)

$$f'(x_1) + f'(x_2) = (2ax_1 + b) + (2ax_2 + b) = 2a(x_1 + x_2) + 2b = 2a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + 2b = 0$$

Interpretazione geometrica:

le tangenti nei punti di intersezione di una parabola con l'asse delle x hanno coefficienti angolari opposti.

Infatti $f'(x_1)$ è il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa x_1 ed $f'(x_2)$ è il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa x_2 e la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ può essere vista nella forma $f'(x_1) = -f'(x_2)$.

QUESITO 10

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

Il valor medio richiesto è dato da:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx}{2-1} = \int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ integrando per parti:

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \big(e^x(x-1)\big)dx = -\frac{1}{x}e^x(x-1) - \int -\frac{1}{x}[e^x(x-1)+e^x]dx =$$

$$= -e^x + \frac{e^x}{x} + \int \frac{1}{x}(xe^x - e^x + e^x)dx = -e^x + \frac{e^x}{x} + \int e^x dx = \frac{e^x}{x} + k$$

Quindi:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = \left[\frac{e^x}{x}\right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e \cong 0.98$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria