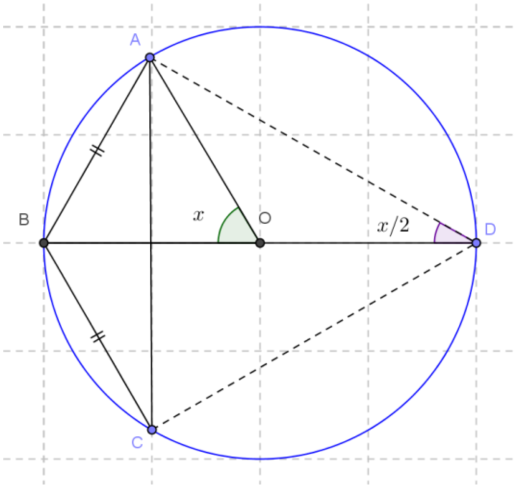
ORDINAMENTO 2010 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B, C, tali che AB = BC.



1)

Si calcoli, in funzione dell'angolo $A\hat{O}B = x$ *, la quantità:*

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

Controllando che risulta:

$$f(x) = -4\cos^2 x - 4\,cosx + 8$$

L'angolo x ha le seguenti limitazioni: $0 \le x \le \pi$.

Notiamo che l'angolo ADB, angolo alla circonferenza corrispondente all'angolo al centro AOB, misura $\frac{x}{2}$, quindi l'angolo ADC misura. Si ha pertanto:

$$AB = BC = BD \cdot sen\frac{x}{2} = 2 \cdot sen\frac{x}{2}\,, \qquad CA = 2\,senx \quad (teorema\ della\ corda).$$

Quindi:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + 4sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + 4\,sen^2x = 8sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + 4(1-\cos^2 x) =$$

$$= 4(1-\cos x) + 4 - 4\cos^2 x = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8 = f(x)$$

2)

Si studi la funzione $f\,(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

$y = f(x) = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8$

Dominio: $0 \le x \le 2\pi$

Simmetrie notevoli:

Visto l'intervallo di studio, non si pone il problema di stabilire se la funzione è pari o dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0\,,\;\; y = 0.$

Se $y = 0,\quad -4\cos^2 x - 4\cos x + 8 = 0,\quad \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ da cui:

$\cos x = 1:\;\; x = 0,\quad x = 2\pi$
$\cos x = -2:\;\; mai$

Segno della funzione:

$y > 0 \;\; se \;\; -4\cos^2 x - 4\cos x + 8 > 0 \quad \Longrightarrow \; c\cos^2 x + \cos x - 2 < 0\,,\quad -2 < cosx < 0$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$

Limiti:

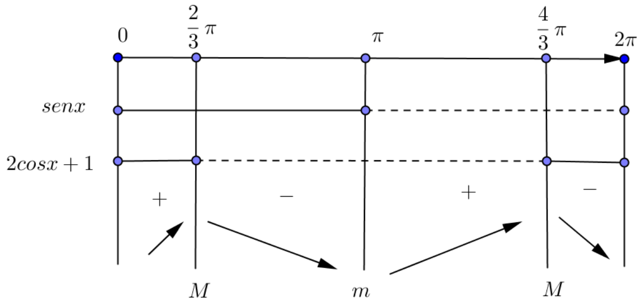
La funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, quindi non serve lo studio dei limiti. Troviamo i valori agli estremi:

$f(0) = f(2\pi) = 0$

Derivata prima:

$f'(x) = D(-4\cos^2 x - 4\cos x + 8) = 8\,cosx\,senx + 4senx = 4senx(2cosx + 1) \ge 0$ *se*

$senx \ge 0 \quad\; 0 \le x \le \pi$
$2cosx + 1 \ge 0\,,\;\; cosx \ge -\frac{1}{2}\,,\;\; \frac{4}{3}\pi \le x \le 2\pi \quad \vee \quad 0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$



Massimo relativo (e assoluto) per $x = \frac{2}{3}\pi$ $\quad e \quad$ $x = \frac{4}{3}\pi$ che vale $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 9$
Minimo relativo (e assoluto) per $x = \pi$ che vale $f(\pi) = 8$

Derivata seconda:

$f''(x) = D\big(4senx(2cosx+1)\big) = 4 \cdot D\big(senx(2cosx+1)\big) \geq 0$

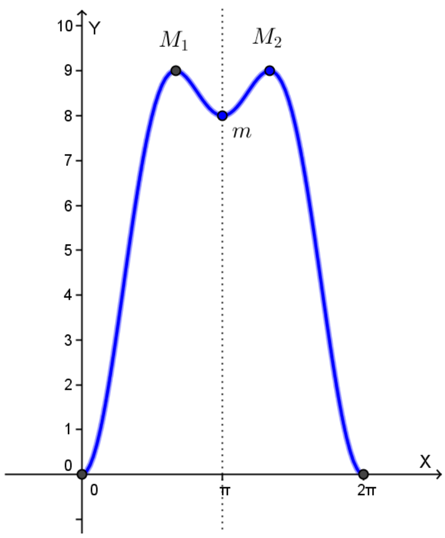
$cosx(2cosx+1) + senx(-2\,senx) = 2\cos^2 x + cosx - 2\,(1-\cos^2 x) =$

$= 4\cos^2 x + \cos x - 2 \geq 0$; $4\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ se $cosx = \frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$, quindi:

$4\cos^2 x + \cos x - 2 \geq 0$ se: $cosx \leq \frac{-1-\sqrt{33}}{8}$, $cosx \geq \frac{-1+\sqrt{33}}{8}$
$0. \leq x \leq 0.935929$
$2.57376 \leq x \leq 3.70942$
$5.34726 \leq x \leq 6.28319$

Abbiamo dei flessi per $x \cong 0.94$, $x \cong 2.57$, $x \cong 3.71$, $x \cong 5.25$

Il grafico della funzione è il seguente:



3)

Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

La simmetria rispetto alla retta $x = \pi$ ha equazioni:

$$\begin{cases} X = 2\pi - x \\ Y = y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 2\pi - X \\ y = Y \end{cases}$$

La funzione

$$y = f(x) = 2\,cosx + 2\,sen^2 x$$

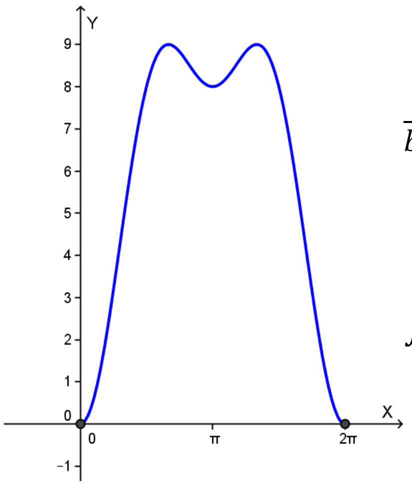
si trasforma in:

$$Y = 2\cos(2\pi - X) + 2sen^2(2\pi - x) = 2cosX + 2sen^2 X$$

quindi la curva è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

4)

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.



Il valore medio della funzione è dato da:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(-4\cos^2 x - 4\,cosx + 8\right) dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\cos^2 x$:

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen(2x) + k$$

Quindi il valor medio risulta:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(-4\cos^2 x - 4\,cosx + 8\right) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[-4\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen(2x)\right) - 4\,senx + 8x\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot [6x - sen(2x) - 4sen(x)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot [12\pi - 0 - 0 - (0)] = 6 = valor\ medio$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri