ORDINAMENTO 2010 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Data la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1)

Si determini il dominio di $f(x)$ e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.

Il **dominio** della funzione è dato da: $1 - x^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{-1 \leq x \leq 1}$

La funzione è continua in ogni punto del dominio (prodotto di funzioni continue).

Studiamo la derivabilità:

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

La funzione non è derivabile in $x = \pm 1$, in cui tangente verticale.

2)

Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Dominio: $-1 \leq x \leq 1$

Simmetrie notevoli:

$f(-x) = -f(x)$: quindi la funzione è dispari (grafico simmetrico rispetto all'origine).

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = 0$.
Se $y = 0$, $x = 0 \;\; e \;\; x = \pm 1$.

Segno della funzione:

$y > 0 \quad se \quad 0 < x < 1$

Limiti:

La funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, quindi non serve lo studio dei limiti. Troviamo i valori agli estremi:

$f(-1) = f(1) = 0$

Derivata prima:

$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0$ se $1 - 2x^2 \geq 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$: in tale intervallo la funzione è crescente.

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è punto di minimo relativo (e assoluto), ed è $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$

$x = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ è punto di massimo relativo (e assoluto), ed è $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$

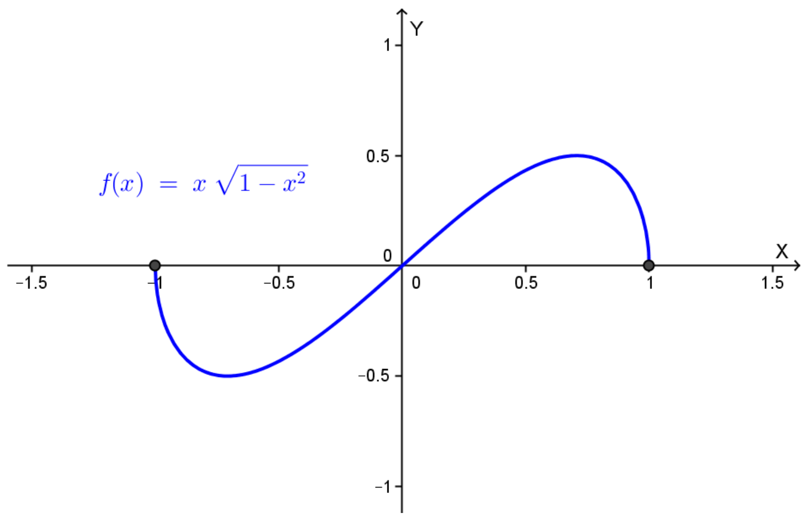
Derivata seconda:

$f''(x) = D\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2x^3-3x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \quad se \quad 2x^3 - 3x \geq 0, \quad x(2x^2 - 3) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 0$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se $0 < x < 1$ e verso il basso se $0 < x < 1$.

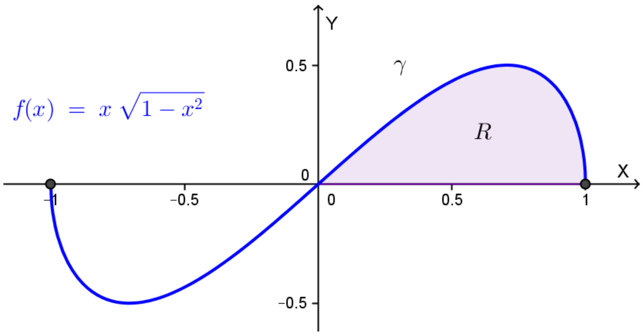
$x = 0$ è un punto di flesso (ordinata $f(0) = 0$).

Il grafico della funzione è il seguente:



3)

Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.



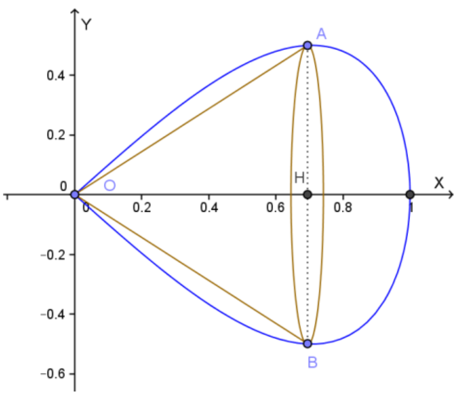
L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$A(R) = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}[0-(1)] =$$

$$= \frac{1}{3}\ \ u^2\ \cong 0.33\ \ u^2 = A(R)$$

4)

La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S. In S si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.



Il volume del cono è: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, dove $r = AH = f(x)$ e $h = OH = x$ (con $0 \le x \le 1$)
Quindi:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot f^2(x) \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (1 - x^2) \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot x^3 \cdot (1 - x^2)$ che è massimo se lo è: $y = g(x) = x^3 \cdot (1 - x^2) = x^3 - x^5$, con $0 \le x \le 1$.

Questa funzione è continua e derivabile nell'intervallo chiuso e limitato $[0; 1]$, quindi per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti, che sono da ricercarsi tra i valori agli estremi dell'intervallo ed il valori che annullano la derivata prima.

$g'(x) = 3x^2 - 5x^4 = 0 \quad se \quad x = 0 \quad e \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$. Risulta:

$g(0) = 0, \quad g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{25} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Quindi il volume risulta massimo se $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$, in tal caso si ha:

$$r = AH = f(x) = f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{6} = r \cong 0.49$$

$$h = OH = x = \sqrt{\frac{3}{5}} = h \cong 0.78$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri