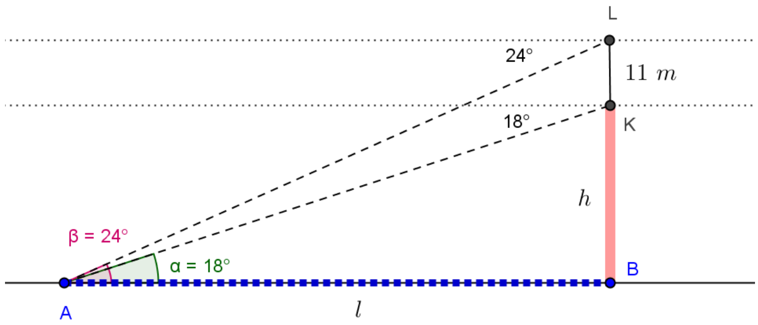
ORDINAMENTO 2010 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.



Indichiamo con h l'altezza della roccia e con l la larghezza del fiume. Risulta:

$h = l \cdot tg18°$, $h + 11 = l \cdot tg24°$, da cui:

$$\frac{h}{tg18°} = \frac{h+11}{tg24°} \implies h(tg24° - tg18°) = 11\, tg18° \implies h = \frac{11\, tg18°}{tg24° - tg18°} \cong 29.71\, m$$

Quindi:

$$l = \frac{h}{tg18°} \cong \frac{29.71\, m}{tg18°} \cong 91.44\, m$$

Il fiume, nel punto richiesto, è quindi largo circa 91.44 metri.

QUESITO 2

Considerata la funzione: $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, *dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che* $lim_{x\to 0} f(x) = 2$.

Risulta:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3xln3} - e^{xlna}}{e^{xln6} - e^{xln5}} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{3xln3} - 1) - (e^{xlna} - 1)}{(e^{xln6} - 1) - (e^{xln5} - 1)} =$$

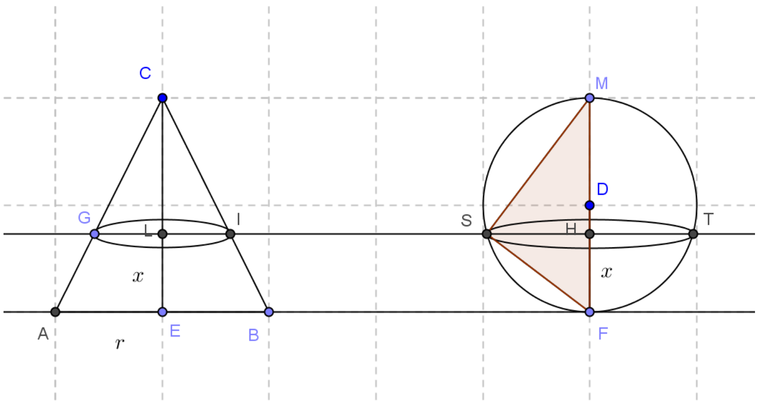
$$= \lim_{x \to 0} \frac{3xln3 - xlna}{xln6 - xln5} = \frac{3ln3 - lna}{ln6 - ln5} = \frac{ln\left(\frac{27}{a}\right)}{ln\left(\frac{6}{5}\right)} = 2 \quad se \quad ln\left(\frac{27}{a}\right) = 2 \cdot ln\left(\frac{6}{5}\right) \quad da\ cui:$$

$$ln\left(\frac{27}{a}\right) = ln\left(\frac{36}{25}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{27}{a} = \frac{36}{25} \quad \Longrightarrow \quad a = 27 \cdot \frac{25}{36} = \frac{75}{4}$$

(Nota: ricordiamo che , se $f(x) \to 0$, risulta: $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$).

QUESITO 3

Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza 2r, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?



La distanza x dal piano α soddisfa la limitazione: $0 \le x \le 2r$

La sezione con il cono ha area: $S(cono) = \pi \cdot GL^2$
Determiniamo GL.
Dalla similitudine fra i triangoli GLC e AEC segue che:

$$GL: CL = AE: CE \quad \Longrightarrow \quad GL: (2r - x) = r: 2r \quad \Longrightarrow \quad GL = \frac{2r - x}{2}$$

Quindi: $S(cono) = \pi \cdot GL^2 = \pi \cdot \left(\frac{2r-x}{2}\right)^2$

La sezione con la sfera ha area: $S(sfera) = \pi \cdot SH^2$
Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo FSM risulta:

$SH^2 = FH \cdot HM = x(2r - x)$

Quindi: $S(sfera) = \pi \cdot SH^2 = \pi \cdot x \cdot (2r - x)$

La somma delle aree delle sezioni è quindi:

$S = \ S(cono) + S(sfera) = \pi \cdot \left(\frac{2r-x}{2}\right)^2 + \pi \cdot x \cdot (2r - x)$ che è massima se lo è:

$y = \left(\frac{2r-x}{2}\right)^2 + x \cdot (2r - x) = (2r - x)\left(\frac{2r-x}{4} + x\right) = (2r - x)\left(\frac{2r+3x}{4}\right) = \max se\ lo$ è:

$z = (2r - x)(2r + 3x) = -3x^2 - 4rx + 4r^2$; tale funzione ha per grafico una parabola con la concavità rivolta verso il basso, quindi ha il massimo nel vertice, cioè per:

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{4r}{6} = \frac{2}{3}r$, valore che soddisfa la limitazione della x.

In conclusione:

La somma delle aree delle sezioni è massima quando la distanza x dal piano di base α è uguale ai 2/3 del raggio di base del cono.

QUESITO 4

Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

Risulta: $f'(x) = 2ax + b$, quindi (ricordando che $x_1 + x_2 = -b/a$)

$$f'(x_1) + f'(x_2) = (2ax_1 + b) + (2ax_2 + b) = 2a(x_1 + x_2) + 2b = 2a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + 2b = 0$$

Interpretazione geometrica:

le tangenti nei punti di intersezione di una parabola con l'asse delle x hanno coefficienti angolari opposti.

Infatti $f'(x_1)$ è il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa x_1 ed $f'(x_2)$ è il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa x_2 e la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ può essere vista nella forma $f'(x_1) = -f'(x_2)$.

QUESITO 5

Si calcoli il valore medio della funzione $f\ (x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \le x \le 2$.

Il valor medio richiesto è dato da:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx}{2-1} = \int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ integrando per parti:

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \left(e^x(x-1)\right)dx = -\frac{1}{x}e^x(x-1) - \int -\frac{1}{x}[e^x(x-1)+e^x]dx =$$

$$= -e^x + \frac{e^x}{x} + \int \frac{1}{x}(xe^x - e^x + e^x)dx = -e^x + \frac{e^x}{x} + \int e^x dx = \frac{e^x}{x} + k$$

Quindi:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = \left[\frac{e^x}{x}\right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e \cong 0.98$$

QUESITO 6

Si determinino a e b in modo tale che il grafico della funzione $y = a^{x+b}$ passi per i punti del piano xy di coordinate (1,4) e (3,8) .

Occorre risolvere il seguente sistema in a e b (con a>0)

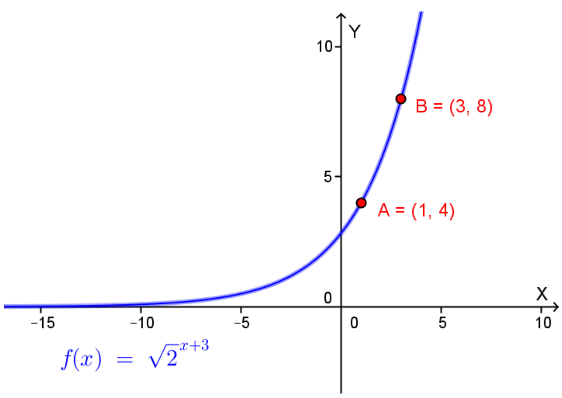
$\begin{cases} 4 = a^{1+b} \\ 8 = a^{3+b} \end{cases}$ da qui, dividendo membro a membro la seconda per la prima equazione:

$$\begin{cases} 2 = \frac{a^{3+b}}{a^{1+b}} \\ 4 = a^{1+b} \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2 = a^2 \\ 4 = a^{1+b} \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ 4 = a^{1+b} \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ 4 = \left(\sqrt{2}\right)^{1+b} \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ 4 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{1+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ 2^2 = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b} \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}b \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 3 \end{cases}$$

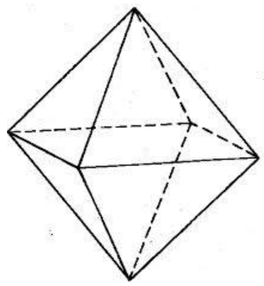
La funzione richiesta ha quindi equazione: $y = \left(\sqrt{2}\right)^{x+3} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{x+3} \quad \Rightarrow \quad y = 2^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

Il cui grafico è:



QUESITO 7

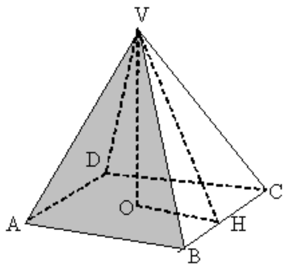
Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza l. Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.



Ricordiamo che il volume dell'ottaedro regolare di spigolo l è:

$$V(ottaedro\ regolare) = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Questa formula si ottiene raddoppiando il volume della piramide regolare retta a base quadrata con spigoli tutti uguali ad l; infatti:



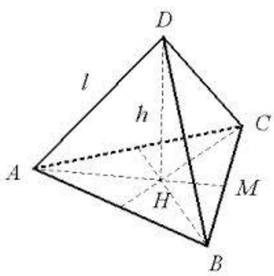
$$V(tetraedro) = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot VO$$

Ma $VO = \sqrt{VH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(l\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}l^2} = l\frac{\sqrt{2}}{2}$ quindi:

$$V(tetraedro) = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot l\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6}l^3\sqrt{2}$$ pertanto:

$$V(ottaedro\ regolare) = 2 \cdot \frac{1}{6}l^3\sqrt{2} = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Determiniamo ora il volume del tetraedro regolare di spigolo l.



Il volume del tetraedro è dato da:

$$V(tetraedro) = \frac{1}{3}A(base) \cdot h$$

La base è un triangolo equilatero di lato l, quindi la sua area è:

$$A(base) = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Determiniamo l'altezza h del tetraedro. Notiamo che AH è uguale ai 2/3 di AM (poiché AM è mediana e H baricentro); AM, che è anche altezza del triangolo equilatero di base è data da: $AM = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; pertanto $AH = \frac{2}{3}AM = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

Quindi (dato che il triangolo ADH è rettangolo in H) si ha:

$$h = DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{l^2 - \frac{1}{3}l^2} = l \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Pertanto:

$$V(tetraedro\ regolare) = \frac{1}{3}A(base) \cdot h = \frac{1}{3}\left(l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \left(l \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = l^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Si ha quindi:

$$V(ottaedro\ regolare) = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3} = 4 \cdot \left(l^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}\right) = 4 \cdot V(tetraedro\ regolare)$$

QUESITO 8

Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = 2t$ *e* $y = \frac{2}{t^2+1}$ *nel suo punto di coordinate (2,1) .*

Scriviamo la funzione in forma cartesiana.

Da $x = 2t$ si ricava $t = \frac{x}{2}$ e sostituendo in $y = \frac{2}{t^2+1}$ si ha: $y = \frac{2}{\frac{x^2}{4}+1}$ cioè:

$$\boldsymbol{y = \frac{8}{x^2 + 4}}$$

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$y' = -8 \cdot \frac{2x}{(x^2+4)^2} = -\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

La tangente nel punto di coordinate (2;1) ha quindi equazione:

$$y - 1 = y'(2) \cdot (x-2) = -\frac{32}{64}(x-2) = -\frac{1}{2}(x-2), \quad quindi:$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

N.B. L'equazione della tangente si poteva anche trovare a partire dalle equazioni parametriche della curva, mediante la formula:

$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \cdot (x - x(t_0))$ (*)

Essendo t_0 il valore del parametro corrispondente al punto. Nel nostro caso risulta:

$x = 2t \quad \Longrightarrow \quad 2 = 2t \quad \Longrightarrow t = 1 \quad \Longrightarrow y(1) = 1$

$x'(t) = 2 \quad \Longrightarrow \quad x'(1) = 2 \;; \quad y'(t) = -\dfrac{4t}{(t^2+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad y'(1) = -1$

Sostituendo in (*) otteniamo l'equazione della tangente:

$y - 1 = \dfrac{-1}{2} \cdot (x - 2) \quad \Longrightarrow \quad y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

QUESITO 9

Si dimostri che se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 , ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.

Hp: $f(x)$ derivabile in x_0
Th: $f(x)$ continua in x_0

Dm

Dall'ipotesi si ha che: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ da cui:

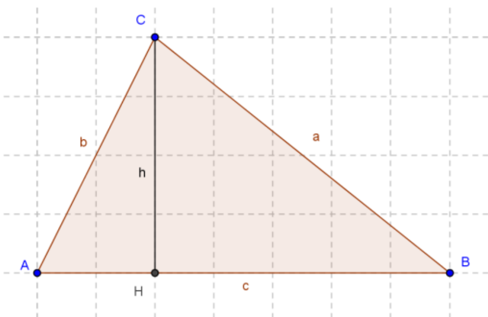
$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h = \lim_{h\to 0} f'(x_0) \cdot h = 0.$

Quindi: $\lim_{h\to 0}[f(x_0+h) - f(x_0)] = 0$ che è come dire che:

$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$: ciò equivale a dire che la funzione è continua in x_0 .

QUESITO 10

Si dimostri che la differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.



Dobbiamo dimostrare che: $a^2 - b^2 = BH^2 - AH^2$.

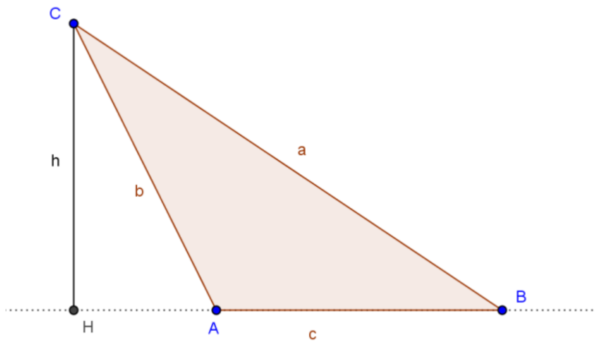
Risulta:

$a^2 = h^2 + BH^2 \quad e \quad b^2 = h^2 + AH^2 \quad da\ cui \quad a^2 - b^2 = (h^2 + BH^2) - (h^2 + AH^2)$

Quindi:

$a^2 - b^2 = h^2 + BH^2 - h^2 - AH^2 = BH^2 - AH^2 \quad c.v.d$

Se H cade all'esterno del lato AB si ha:



$a^2 = BH^2 + h^2, \quad b^2 = AH^2 + h^2 \quad da\ cui \quad a^2 - b^2 = BH^2 - AH^2 \quad c.v.d.$

Se H cade all'esterno in A (triangolo rettangolo di ipotenusa BC) si ha AH=0, quindi:

$$a^2 - b^2 = BH^2 - AH^2 = c^2 - 0 = c^2$$