

### PROBLEMA 1

Data una circonferenza di centro  $O$  e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti  $A, B, C$ , tali che  $AB = BC$ .

1. Si calcoli, in funzione dell'angolo  $\widehat{AOB} = x$ , la quantità:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

controllando che risulti:

$$f(x) = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8$$

2. Si studi la funzione  $f(x)$  e si tracci il suo grafico  $\gamma$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$
3. Si verifichi che la curva  $\gamma$  è simmetrica rispetto alla retta di equazione  $x = \pi$
4. Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x)$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

### PROBLEMA 2

Sia data la funzione  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1. Si determini il dominio di  $f(x)$  e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.
2. Si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .
3. Si calcoli l'area della parte di piano  $R$  racchiusa dal grafico  $\gamma$  e dal semiasse positivo delle ascisse.
4. La regione  $R$  genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido  $S$ . In  $S$  si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.

## QUESTIONARIO

1. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a  $18^\circ$  e  $24^\circ$ . Si determini la larghezza del fiume in quel punto.
2. Considerata la funzione  $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$ , dove  $a$  è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ .
3. Su un piano orizzontale  $\alpha$  si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è  $r$  e l'altezza  $2r$ , e una sfera di raggio  $r$ . A quale distanza  $x$  dal piano  $\alpha$  bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale  $\beta$ , perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?
4. Si dimostri che per gli zeri  $x_1$  e  $x_2$  di una funzione  $f(x) = ax^2 + bx + c$  vale la relazione  $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$  e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.
5. Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ , nell'intervallo  $1 \leq x \leq 2$ .
6. Si determinino  $a$  e  $b$  in modo tale che il grafico della funzione  $y = a^{x+b}$  passi per i punti del piano  $xy$  di coordinate  $(1,4)$  e  $(3,8)$ .
7. Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza  $l$ . Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche  $x = 2t$  e  $y = \frac{2}{t^2 + 1}$  nel suo punto di coordinate  $(2,1)$ .
9. Si dimostri che se una funzione  $f(x)$  è derivabile nel punto  $x_0$ , ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.
10. Si dimostri che la differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.