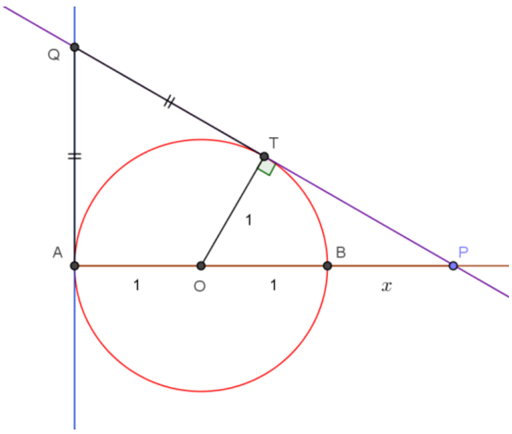
PNI 2010 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

E' data una circonferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2$. *Sul prolungamento del diametro AB, dalla parte di B, si prenda un punto P e da esso si conduca una tangente alla circonferenza.*



1)

Detti T il punto di tangenza e Q il punto di intersezione di questa tangente con la tangente in A alla circonferenza, si calcoli il rapporto:

$$\frac{TQ^2 + TP^2}{AP^2},$$

espresso in funzione di $x = \overline{BP}$, *controllando che risulta :*

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x} .$$

Notiamo che risulta $x > 0$.

Dalla similitudine fra i triangoli APQ e TPO si ha:

$AQ: AP = OT: TP$

Essendo $AQ = TQ$ e $TP^2 = OP^2 - OT^2 = (1 + x)^2 - 1 = x^2 + 2x$ si ha:

$$TQ: (2 + x) = 1: \sqrt{x^2 + 2x} \quad \Rightarrow \quad TQ = \frac{2 + x}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} \quad \Rightarrow \quad TQ^2 = \frac{x + 2}{x}$$

Quindi:

$$f(x)=\frac{TQ^2+TP^2}{AP^2}=\frac{\frac{x+2}{x}+x^2+2x}{(x+2)^2}=\frac{x+2+x(x^2+2x)}{x(x+2)^2}=\frac{(x+2)(1+x^2)}{x(x+2)^2}=\frac{1+x^2}{x(x+2)}$$

Quindi:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2x}} \quad c.v.d$$

2)

Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

$$y=f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2x}$$

Dominio:

$x^2+2x\neq 0 \quad da\ cui \quad x\neq -2 \quad e\ x\neq 0 \ : \quad -\infty<x<-2\ ,-2<x<0\ ,0<x<+\infty$

Simmetrie notevoli:

Visto l'intervallo di studio, non si pone il problema di stabilire se la funzione è pari o dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x=0$, $y=\nexists$.

Se $y=0$, $x^2+1=0$: mai

Quindi non ci sono intersezioni con gli assi cartesiani.

Segno della funzione:

$y>0 \ \ se \ \ \frac{x^2+1}{x^2+2x}>0 \quad \Longrightarrow \ x^2+2x>0, \ \ x<-2 \ \ vel \ \ x>0$

Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2+2x}=1 \ : \quad y=1 \quad asintoto\ orizzontale$$

$$\lim_{x\to(-2)^{\mp}} \frac{x^2+1}{x^2+2x} = \lim_{x\to(-2)^{\mp}} \frac{x^2+1}{x(x+2)} = \pm\infty \quad : \quad x=-2 \quad \textit{asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{x^2+1}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{x^2+1}{x(x+2)} = \mp\infty \quad : \quad x=0 \quad \textit{asintoto verticale}$$

Derivata prima:

$f'(x) = D\left(\frac{x^2+1}{x^2+2x}\right) = \frac{2(x^2-x-1)}{x^2(x+2)^2} \geq 0 \quad se \quad x^2-x-1 \geq 0 \; : \; x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \; or \; x \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Quindi la funzione è crescente se $x<-2 \;\; or \;\; -2<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \;\; or \;\; x>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e decrescente se

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<0 \;\; or \;\; 0<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$: quindi abbiamo un punto di massimo relativo in

$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ed un punto di minimo relativo in $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; le ordinate di tali punti sono:

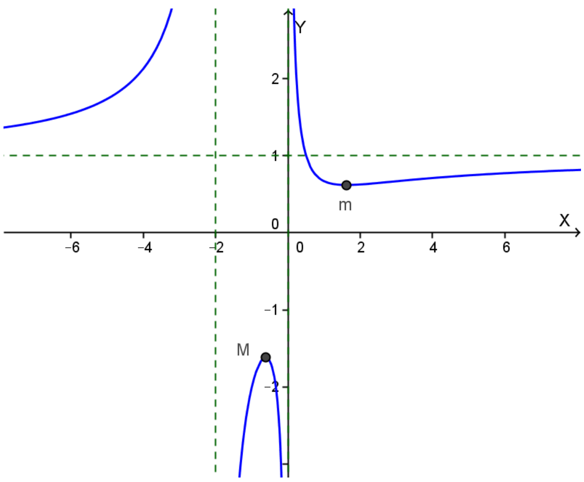
$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cong -1.6 \quad , \quad f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cong +0.62$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = D\left(\frac{2(x^2-x-1)}{x^2(x+2)^2}\right) = \frac{-4x^3+6x^2+12x+8}{x^3(x+2)^3} \geq 0$$

Siccome $f''(2) \cong 0.05 > 0 \quad e \quad f'(3) = -0.003 < 0$ abbiamo un flesso fra x=2 e x=3.
Tralasciamo lo studio completo della derivata seconda.

Il grafico della funzione è il seguente:



3)

Si calcolino i numeri a, b, c in modo che risulti:

$$(1) \qquad \frac{x^2+1}{x^2+2x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2} \ .$$

$$\frac{x^2+1}{x^2+2x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2} = \frac{ax(x+2)+b(x+2)+cx}{x(x+2)} \quad \Rightarrow$$

$$x^2+1 = ax^2 + (2a+b+c)x + 2b \quad \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a+b+c = 0 \\ 2b = 1 \end{cases}$$

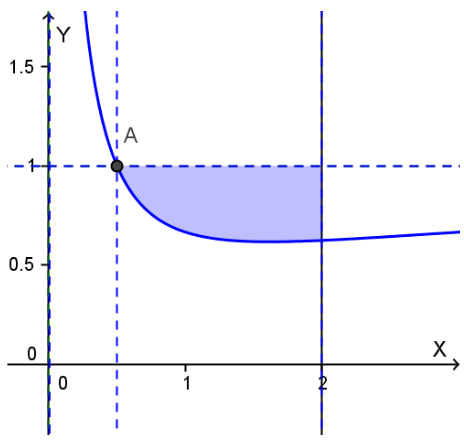
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -2a - b = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{5}{2(x+2)}$$

4)

Tenendo presente la scomposizione (1), si calcoli l'area della regione piana, limitata da γ, dal suo asintoto orizzontale e dalla retta d'equazione $x = 2$.



Determiniamo l'intersezione A tra la curva e l'asintoto orizzontale:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x} \end{cases} \quad ; \quad x^2+1 = x^2+2x \quad ; \quad \boldsymbol{x_A = \dfrac{1}{2}}$$

L'area richiesta si ottiene quindi calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_{\frac{1}{2}}^{2} [1 - f(x)]\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{5}{2(x+2)}\right)\right] dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[-\frac{1}{2x} + \frac{5}{2(x+2)}\right] dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{5}{2}\ln(x+2)\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{1}{2}ln2 + \frac{5}{2}ln4 - \left(-\frac{1}{2}ln\frac{1}{2} + \frac{5}{2}ln\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}ln2 + \frac{5}{2}ln4 +$$

$$+\frac{1}{2}ln\frac{1}{2} - \frac{5}{2}ln\frac{5}{2} = -\frac{1}{2}ln2 + \frac{5}{2}ln4 - \frac{1}{2}ln2 - \frac{5}{2}ln\frac{5}{2} = -ln2 + \frac{5}{2}\left(ln4 - ln\frac{5}{2}\right) =$$

$$= -ln2 + \frac{5}{2}ln\frac{8}{5} \cong 0.48\, u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri